מיקרו כלכלה 3

סוכם ע"י דביר צנוע

פרופ' חיים פרשטמן וד"ר נדב לוי

סמסטר ב' תש"ע

הקדמה

הדפים שלפניכם מהווים סיכום של קורס מיקרו כלכלה 3, אשר הועבר באוניברסיטת תל-אביב ע"י פרופ' חיים פרשטמן וד"ר נדב לוי בסמסטר ב' תש"ע. הסיכום הוקלד בידיי במהלך ההרצאות, ולא אושר על ידי גורמים אקדמיים באופן כללי או סגל הקורס בפרט, ויש לקחת זאת בחשבון בעת הלמידה. הסיכום הינו כלי עזר בלבד ולא מחליף למידה פעילה וניהול מחברת מסודרת במהלך הקורס.

אם מצאתם תועלת בשימוש בסיכום אתם מוזמנים לבלוג הסקסי שלי בכתובת:

http://dvirtzanua.wordpress.com

שם תוכלו להוריד סיכומים במקצועות נוספים, וגם ליהנות מהפוסטים שאני כותב בלילות חלשים.

אה, ועוד משהו- אני נותן שיעורים פרטיים במבחר מקצועות כלכלה וחשבונאות. ניתן ליצור איתי קשר בדרכים הבאות:

פייסבוק http://www.facebook.com/dvir.tzanua

אימייל dvirsmail@gmail.com

טלפון 054-2209558

סיכום זה מוקדש לידידי זיו ישראל, שלא מסוגל להתעורר בזמן להרצאה גם אם היא מתחילה ב-11 בבוקר. כולנו מאחוריך, זיו!

MAY THE MARKET FORCE BE WITH YOU!

דביר צנוע

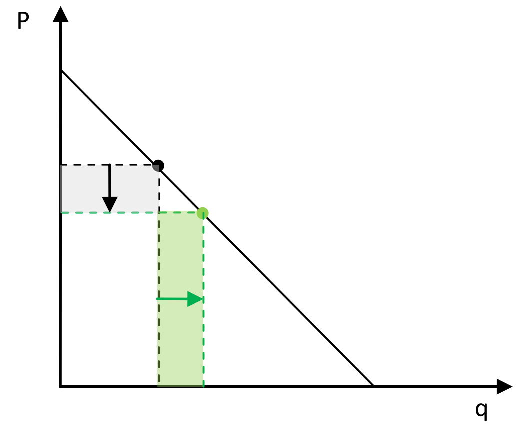
תוכן עניינים

מונופול

מונופול - פירמה בודדת בענף שלה, אין סכנה למתחרות, והיא עומדת לבדה מול עקומת ביקוש. היא יכולה לקבוע מחיר, יש לה כח שוק, ואין תחליפיות עם מוצרים אחרים.

R = פדיון, Revenue

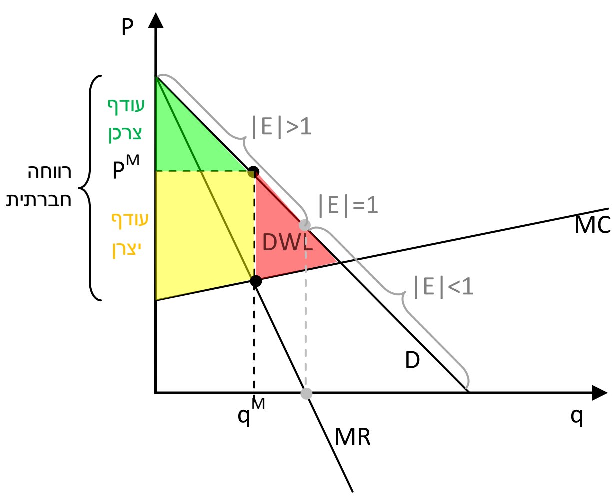
P(q) = פונקציית ביקוש, מחיר כפונקציה של כמות.



$$R(q) = P(q) \cdot q$$

$$MR(q) = P(q) + \underbrace{\frac{\partial P(q)}{\partial q}}_{\text{שלילי}} \cdot q < P$$

כלומר, בייצור יחידה אחת של מוצר, אני מרוויח את המחיר ששולם עבור היחידה הזו (בירוק), ומפסיד את ירידת המחיר עבור כל היחידות שנמכרו עד עתה (באפור).



$$MR = P\left(1 + \frac{\partial P}{\partial q} \cdot \frac{q}{P}\right) = P\left(1 - \frac{1}{|E|}\right)$$

$$|E| > 1 \; MR > 0$$

$$|E| = 1 \; MR = 0$$

$$|E| < 1 \; MR < 0$$

$$\max \pi = R(q) - C(q) \Rightarrow MR = MC$$

המונופול גורם לירידה של הרווחה הכוללת במשק (DWL = Dead Weight Loss).

<u>נפתור בעיה לדוגמה במונחים כלליים:</u>

ביקוש $P = a - bq$

פדיון $R = aq - bq^2$

פדיון שולי $MR = a - 2bq$

עלות שולית קבועה $MC = c$

תנאי מקסום רווח מונופול $MR = MC$ ולפיכך $a - 2hq = c$

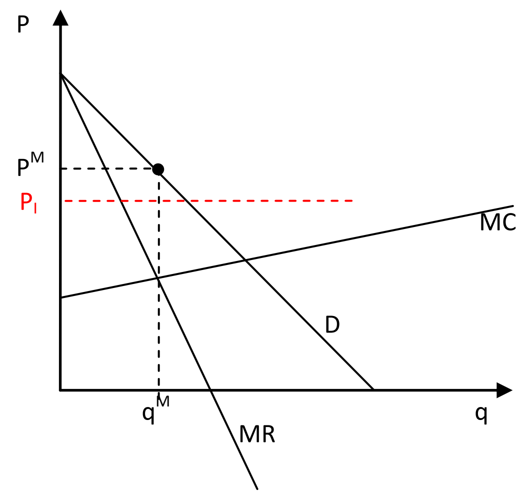
הכמות המונופוליסטית $q^m = \frac{a-c}{2b}$

המחיר המונופוליסטי $P^m = a - b \cdot \frac{a-c}{2b} = \frac{a+c}{2}$

הרווח המונופוליסטי $\pi = (P^m - c) \cdot q^m = \frac{(a-c)^2}{4b}$

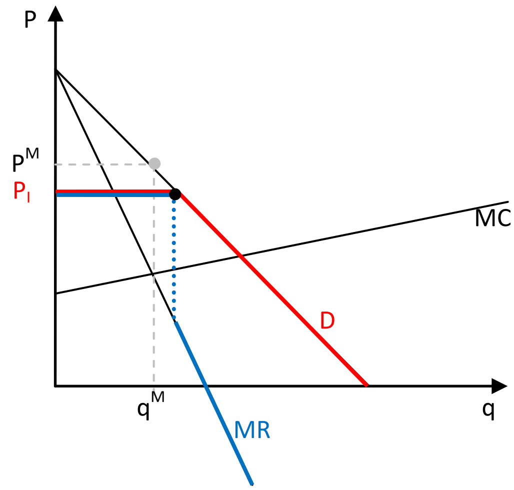
ייבוא וייצוא

נניח כעת שניתן לייבא את אותו המוצר מחו"ל במחיר קבוע P_I. נניח גם $P_I<P^M$. היה מונופול, ונפתח את השוק שלו לייבוא.



במצב החדש, כל חלק של עקומת הביקוש שנמצא מעל המחיר הבינלאומי אינו רלוונטי וניתן למחוק אותו. כעת אנחנו פותרים את בעית המונופול באותה הצורה, רק עם ביקוש מותאם (באדום). ראשית יש למצוא את MR החדש. MR רלוונטי רק נקודתית: כלומר, MR שמתחת לפונקציית הביקוש שלא השתנתה, לא ישתנה גם הוא. קיבלנו MR שאינו רציף (בכחול). במקרה זה גם אין נקודה שבה MC=MR. הנקודה שבה נייצר היא הנקודה

השחורה, כיוון שבייצור של יחידה אחת יותר, נקפוץ למצב שבו MC>MR.

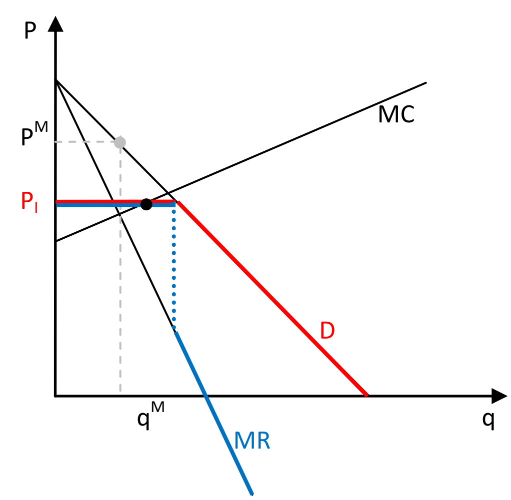


המשמעות של התוצאה שקיבלנו היא שהייבוא הוא זה שקובע את המחיר – גם אם הכמויות שהוא מוכר קטנות לעומת הכמויות שמוכרת הפירמה, אפילו שהיא השחקן הכי דומיננטי בשוק. המסקנה הכלכלית החשובה היא *שהמחיר נקבע לפי האלטרנטיבה*.

נניח כעת מעלים את עלויות הפירמה. מה קורה למחיר אם ה-MC עולה? התשובה: *שום דבר*. כאשר המחיר נקבע על ידי האלטרנטיבה, יכולים להיות שינויים משמעותיים בשוק בלי שיקרה כלום למחירים.

כעת נניח כי כיום, המוצר מיוצר כולו על ידי גורמי ייצור מקומיים, ומתקיים דיון לגבי העלאת המכס. אבל הפירמה מייצרת את כל הביקוש המקומי, אז מדוע זה משנה מה יהיה גובה המכס אם אין יבוא? החשיבות של שינוי גובה המכס נטועה במחיר האלטרנטיבה. ברגע שמחיר האלטרנטיבה עולה, גם המחיר שדורש המונופול עולה.

כמובן שתיתכן סיטואציה שבה גם עם קיום ייבוא, שינוי ב-MC ישנה את הפתרון. במקרה כזה חלק מהביקוש יסופק על ידי יצור, וחלק על ידי ייבוא.

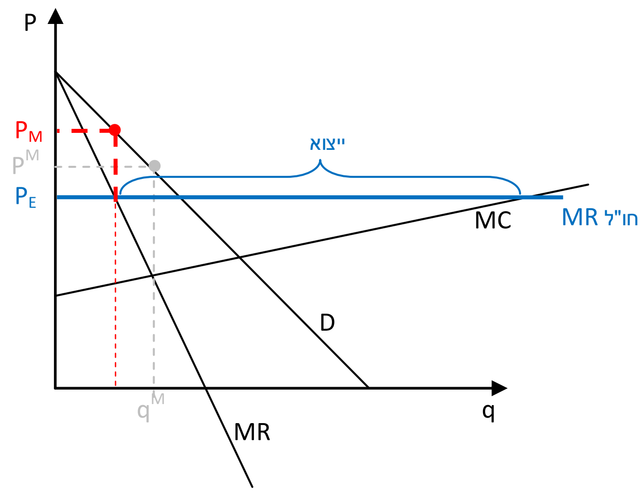


נניח שכעת פותחים את השוק לייצוא במחיר P_E. ניתן להבחין בין שני מקרים:

דביר צנוע || dvirsmail@gmail.com || http://dvirtzanua.wordpress.com

$P_E > P^M$ – יתקיים ייצוא

$P_E < P^M$:



במקרה כזה, הפירמה תמכור בשני השווקים: בחו"ל במחיר נמוך, P_E, ובארץ במחיר גבוה!

הסבר: כל עוד MR בארץ גבוה מ-MR בחו"ל, הפירמה תמכור בארץ במחיר שהולם מכירה של כמות כזו בארץ. מעבר לכך, הפירמה תייצר ותייצא כל עוד MR חו"ל גבוה מ-MC.

מונופול טבעי

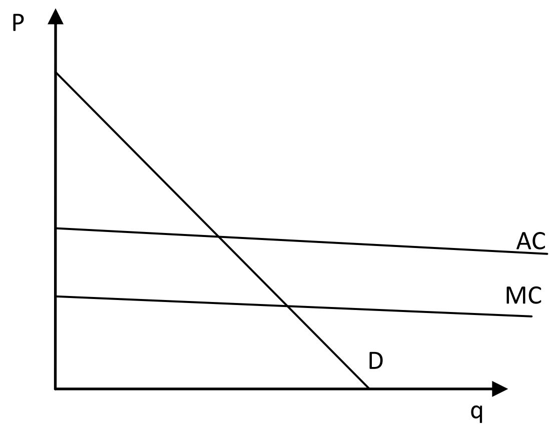
סיטואציה בה המצב הכי יעיל בייצור מוצר מסוים הוא על ידי מונופול. מבחינה פורמלית:

$$TC(q_1 + q_2) < TC(q_1) + TC(q_2)$$

יש לשים לב שיש לנו כאן דילמה בין שני סוגי יעילות – יעילות בייצור לעומת יעילות בחלוקה. אם נתיר קיום של מונופול, הייצור יהיה הכי יעיל, אבל תיגרם אי יעילות חברתית. לעתים באופן מכוון נבחר חוסר יעילות בייצור, על מנת להגיע למצב יותר יעיל חברתית. השאלה המרכזית היא ממה נקבל תועלת יותר גדולה. פתרון ביניים הוא מונופול תחת פיקוח. כך למשל עם חברת החשמל בישראל – מחירי החשמל נקבעים על ידי רשות החשמל.

בעולם, הגיעו למסקנה ש*ייצור* החשמל אינו מונופול טבעי – אין שום יתרון בכך שכל תחנות הכח יהיו בבעלות אחת. דווקא הובלת וחלוקת החשמל הינו מונופול טבעי. לכן במדינות רבות בעולם הוציאו את ייצור החשמל לתחרות, וניהול ואספקת החשמל נותר מונופול.

ישנה בעיה שנוצרת כאשר ה-AC הוא גרף יורד:



במצב בו P=MC, לא כדאי לפירמה לייצר (P<AC ולכן Π<0). המטרה היא למצוא את המחיר הנמוך ביותר, שעבורו עדיין הרווח יהיה חיובי. הנקודה הזו תהיה במפגש של AC ו-D.

איך משפרים את המצב היעיל במקרה זה? נכנס גורם מפקח. לעתים גובים דמי שימוש קבועים, ללא קשר לשימוש (כמו בחשבון המים) – ואז, גרף ה-AC יורד, וקיבלנו מחיר יותר נמוך וצריכה יותר גבוהה (ישנה הנחה נסתרת שאין השפעה משמעותית על D).

איך מיישמים טכניקה זו? גם אם יש אינפורמציה מלאה לגבי ה-AC, עדיין עומדת הדילמה של איך עושים את זה נכון. יש להבהיר שההוצאות המדוברות במודלים האלה הינן הוצאות כלכליות ולא חשבונאיות. כלומר, הן כוללות גם תשואה אלטרנטיבית. כדי לגלות את ה-AC הרגולטור צריך למפות עלויות:

- מיפוי עלויות
  - קבועות
  - משתנות
- תשואה והון
  - הון
  - תשואה

תהליך זה הוא מורכב וכולל הרבה חילוקי דיעות. לדוגמה, בחברת החשמל, התנהל דיון אם לכלול בעלויות את השימוש העצמי בחשמל (בשנים האחרונות הוא אינו כלול בעלויות). דוגמה עדכנית יותר תהיה אג"ח שהנפיקה חברת החשמל בריבית מנופחת – רשות החשמל סירבה להכיר בעלויות המימון העודפות. שיעור תשואה - אם קובעים שיעור תשואה גבוה מדי, החברה תבצע השקעות חריגות בהון. העמסת עלויות קבועות – יש למצוא בסיס העמסה הוגן ומאוזן.

התפקיד של המפקח הוא מאוד רגיש: הוא קובע בפועל את יחסי המחירים, וכך משפיע על התמריצים לצריכה של המוצרים השונים.

מונופולים עוקבים

מצב בו קיימת פירמה A, המוכרת לפירמה B, המוכרת לציבור (אין פירמות אחרות מלבד A ו-B). נפתור בעיה פשוטה למען הדוגמה.

$$P = a - bq$$

לפירמה A עלות c ליחידה, לפירמה B עלות 0. את המחיר ש-A גובה מ-B נסמן d.

בעיות מסוג זה פותרים מהסוף. כשפירמה A קובעת d, היא צריכה לקחת בחשבון מה פירמה B תעשה. רק כשנדע איך B תגיב לכל d, נוכל לקבוע את d האופטימלי.

<u>פירמה B</u>

פירמה B צריכה לקבוע את מחיר המכירה, P. אנחנו כבר יודעים שהיא תשווה פדיון שולי לעלות שולית:

$$MR_B = MC_B$$

$$\boldsymbol{a - 2bq = d \Rightarrow q = \frac{a-d}{2b}}$$

<u>פירמה A</u>

פירמה A מבינה את התהליך הזה, ויודעת שהכמות שפירמה B תמכור לציבור זו הכמות שהיא תקנה מפירמה A. לאור התהליך שראינו לעיל, פירמה A יודעת מה הקשר בין המחיר d שהיא תקבע לכמות.

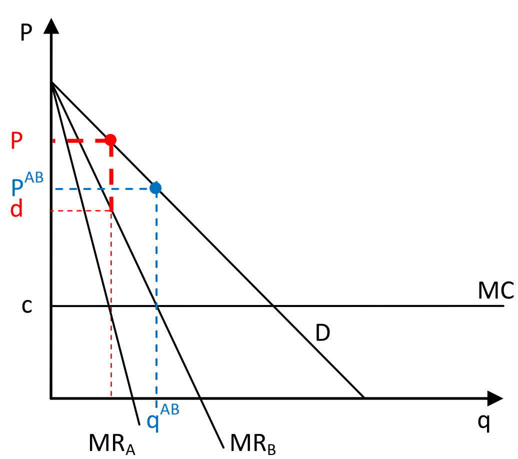
$$MR_A = MC_A$$

$$a - 4bq = c$$

$$q = \frac{a-c}{4b}$$

$$\boldsymbol{P} = a - \frac{b(a-c)}{4b} = \boldsymbol{\frac{3a+c}{4}}$$

<u>מיזוג הפירמות</u>



אם פירמות A ו-B היו מתמזגות, היינו מקבלים מחיר נמוך יותר וכמות גדולה יותר!

$$P_{AB} = \frac{a+c}{2} < \frac{3a+c}{4}$$

$$\pi_{AB} > \pi_A + \pi_B$$

מונופסון

קונה יחיד, המפנים את השינוי במחיר כפונקציה של הכמות שהוא רוכש.

$$\pi = P \cdot f(Q) - w(Q) \cdot Q$$

בפתרון התחרותי, השיווי משקל היה נמצא ב:

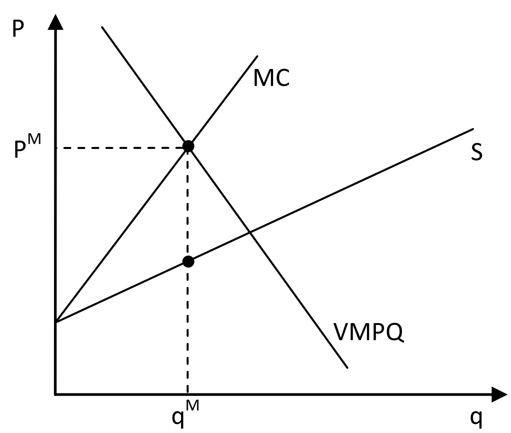
$$\frac{\partial \pi}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P \cdot MP_Q = w$$

במונופסון:

$$P \cdot MP_Q = w'(Q) \cdot Q + w$$

כלומר, הנקודה בה שווי התפוקה השולית מתאזן עם התוספת בעלות, המחולקת לשני חלקים: העליה במחיר הנובעת מעליה בביקוש, ועלות היחידה הנוספת. גם מכאן ניתן להגיע לגמישות:

$$VMP_Q = w\left(w'Q \cdot \frac{Q}{w} + 1\right) = w\left(\frac{1}{|E|} + 1\right)$$



אפליית מחירים

לאפליית מחירים שני רכיבים:

- מחירים בלתי ליניאריים – כאשר לא ניתן לייצג פדיון כ-$R = pq$. למשל, תשלום בכניסה לפארק שעשועים כאשר יש לשלם גם על כל מתקן; תשלום בסיסי על חשמל בנוסף לתשלום נוסף עבור כל קילוואט; ועוד.
- זיהוי – למשל, מתן הנחה לסטודנט או לכל פלח שוק אחר.

	מזוהה	לא מזוהה
מחיר ליניארי	III	X
מחיר לא ליניארי	I	II

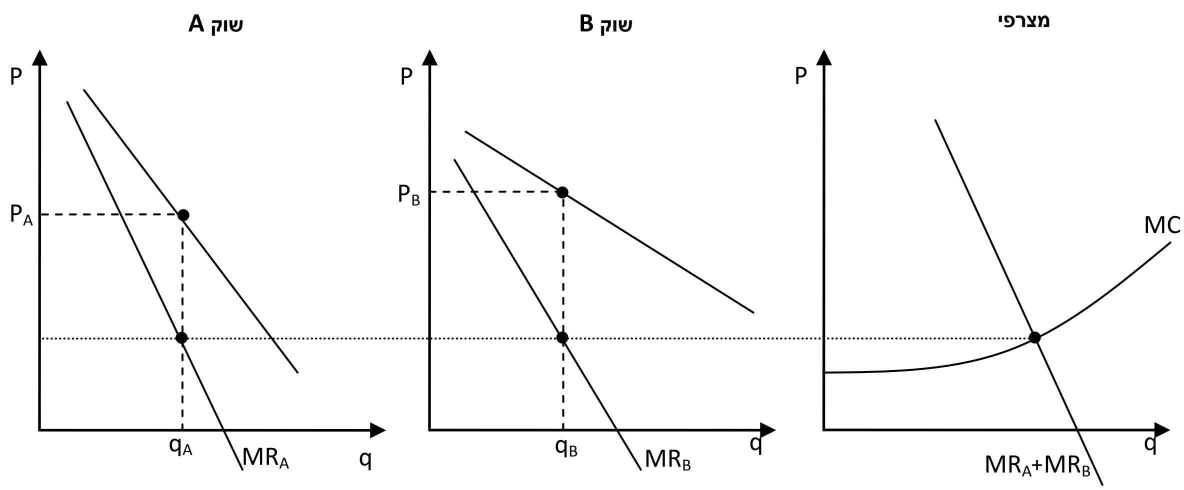
אפליית מחירים מדרגה III

אפליית המחירים הכי נפוצה היא מדרגה III. לדוגמה:

קופון. הקופון מחלק את האוכלוסיה לשני חלקים, ונותן לכל חלק מחיר אחר. מי שיש לו פחות כסף, נעזר בקופון כדי לרכוש את המוצר, בעוד מי שכן יכול להרשות לעצמו, רוכש אותו במחיר מלא. כך הפירמה מכרה במחיר מלא למי שמוכן לשלם במחיר מלא, ובמחיר מופחת למי שלא היה רוכש מלכתחילה במחיר מלא, והרוויחה.

טרייד אין, לדוגמה של מזרנים. ישנם שני סוגים של קהל: כאלה שעוברים דירה, יוצאים מהבית, וכן הלאה, הזקוקים למזרן. ויש את אלה, בעלי המזרנים, שאינם זקוקים למזרן. יש כאן פילוח שנעשה בצורה אמינה – הלקוח חייב להביא את המזרון ממש לחנות, והלקוח לא יכול לזייף את פלח השוק אליו הוא שייך. כך הרוויחה הפירמה את הלקוחות שלא התכוונו לרכוש מזרן. וזאת על אף השימוש במנגנון מסובך ויקר של הובלת והשלכת מזרונים ישנים.

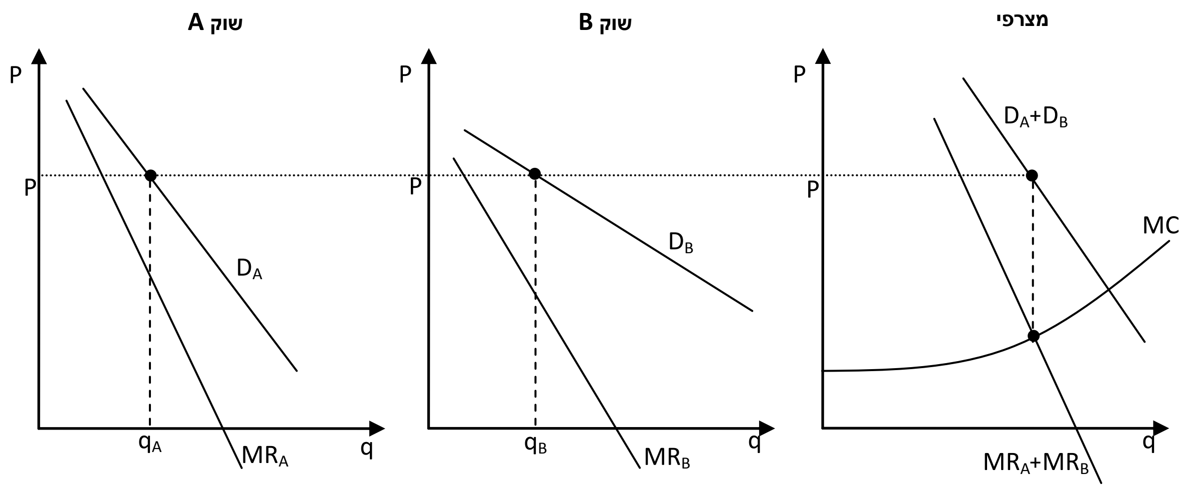
תוכנת מחשב יקרה. פותחה תכנת מחשב יקרה, ורצו למכור אותה לסטודנטים. השקיעו כסף בפיתוח גירסה נכה של התכנה, ומכרו אותה לסטודנטים במחיר יותר זול. סיפור דומה היה במדפסות: השתילו בהן צ'יפ שגרם להן להדפיס לאט יותר ומכרו אותן לסטודנטים במחיר זול. כלומר, שווה לפירמות להשקיע כסף בפילוח השוק על מנת להרחיב את קהל הלקוחות.



אם ה-MC קבוע, אין בעיה: אפשר לפתור כל שוק בנפרד. אך אם ה-MC עולה, ישנה חשיבות רבה להשפעה של שוק אחד על השני, ולכן יש צורך לפתור באופן מצרפי את כל השווקים ביחד.

אנו נרצה להגיע ל-q_A, q_B, כך ש-$MR_A = MR_B = MC$. כדי לעשות זאת, בשוק המצרפי נסכום את עקומות ה-MR, ואז נחזור לכל שוק ונראה מה הכמות בכל שוק.

למען ההשוואה, שוק בו <u>לא ניתן</u> לעשות אפלית מחירים נפתר כך (עבור מחיר P שזהה לכולם):



אפלית מחירים ניתן לנתח דרך הגמישויות:

$$MR_A = MR_B$$

$$P_A\left(1-\frac{1}{|E_A|}\right) = P_B\left(1-\frac{1}{|E_B|}\right)$$

$$|E_A| = 2, \qquad |E_B| = 3$$

$$\frac{1}{2}P_A = \frac{2}{3}P_B$$

$$P_A > P_B$$

מקרה קלאסי של אפלית מחירים הוא DUMPING: פירמה מחו"ל נכנסת למדינה מסוימת, מוכרת במחירי הפסד עד שהמתחרים מתמוטטים, ואז מעלה מחירים בעצמה למחירים רווחיים. בכל מדינה יש חוקים נגד DUMPING שמטילים היטלים מיוחדים במקרים כאלה. עם זאת, יש לבדוק היטב מתי מדובר ב-DUMPING, ומתי במדיניות תמחור הגיונית הנובעת מהבדלים בגמישות הביקוש. מצב בו $P_A > P_B > MC$ אינו מהווה DUMPING, אך את ה-MC קשה מאוד לבדוק, ולכן בדרך כלל בודקים את ההוצאות המשתנות הממוצעות.

דוגמה

$$P_A = 10 - 2q_A$$

$$P_B = 8 - q_B$$

$$MC = q^2$$

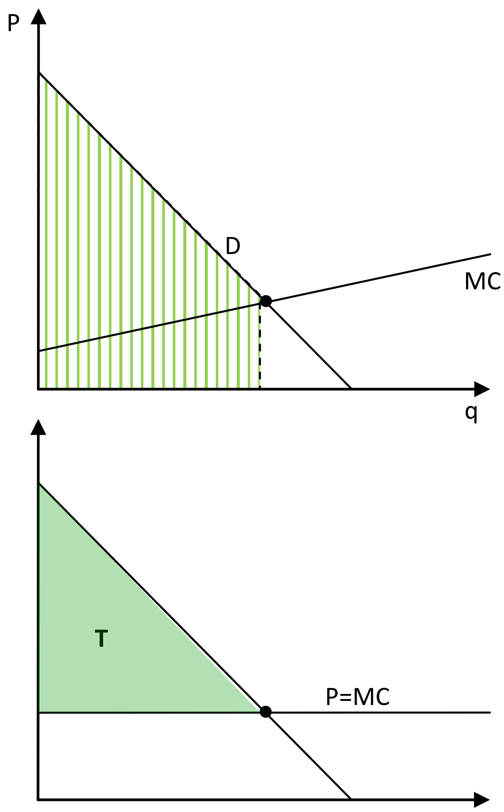
$$MR_A = 10 - 4q_A$$

$$MR_B = 8 - 2q_B$$

$$MC = 2(q_A + q_B)$$

$$\begin{cases} 10 - 4q_A = 8 - 2q_B \\ 10 - 4q_A = 2(q_A + q_B) \end{cases}$$

אפליית מחירים מדרגה I



נקראת גם אפליית מחירים מושלמת. המשמעות היא שאני מסוגל לזהות כל צרכן, ויכול לנקוב במחיר שונה עבורו. עבור הצרכן הראשון, אגבה את המחיר המתאים בפונקצית הביקוש עבור q=1. עבור הצרכן השני, את המחיר המתאים ל-q=2. וכן הלאה. הפירמה לא צריכה להוריד את המחיר עבור הצרכנים הקודמים כדי למכור אותו לאחרים. התהליך יסתיים בנקודה בה הביקוש פוגש את MC. במקרה כזה, כל העודפים ילכו לפירמות (לא יוותר עודף צרכן).

מצב זה הינו מאוד לא ריאלי. מצב יותר מציאותי הינו שיטת התמחור הדו-שלבית. בפני הפירמה עומד צרכן אחד, והפירמה יודעת מה פונקצית הביקוש שלו (של האדם הבודד). היא תגבה מחיר ליחידה P מונופוליסטי, אך תיקח גם מחיר כניסה בגובה כל עודף הצרכן T. כך מגיעים לרווחה חברתית מקסימלית, כאשר הפירמה זוכה ברווחה כולה. ניתן להרחיב זאת למצב בו יש שניים או שלושה סוגי צרכנים, ולקבוע את המחיר עבור כל סוג בנפרד.

אוליגופול

(מבוא להקדמה לעיקרי[2]) תורת המשחקנים

כאשר ישנה כמות קטנה יחסית של שחקנים בשוק, כל שחקן יודע כי השחקנים האחרים יגיבו בהתאם להחלטות שלו עצמו. כלומר, בתהליך קבלת ההחלטות, על השחקן לקחת בחשבון את החלטות המתחרים לפני שהוא מקבל החלטה בעצמו. תורת המשחקים מתחלקת לשני חלקים: שיתופית ולא שיתופית, וההבדל ביניהם הוא צורת הניתוח של הבעיה.

דוגמה לבעיה שיתופית: שלושה שחקנים צריכים לחלק ביניהם 150 שקל. מקבלים סדרה של אקסיומות – פארטו, סימטריות, אי תלות בצורה וכו', ומחפשים את הפתרון שיקיים את כל האקסיומות הללו. אין ניתוח של האינטראקציה בין השחקנים.

בעיה לא שיתופית: מנתחים את האינטראקציה בין השחקנים. רוצים לראות מיהם השחקנים, מהן האסטרטגיות שלהם, מהם חוקי המשחק. במשחק כזה מחפשים פיתרון בו מתקיים שיווי משקל תחת האסטרטגיות של כל השחקנים. בעיות לא שיתופיות מתחלקת לאסטרטגיות נורמליות ולאסטרטגיה רחבה.

- נורמלית – מה שנחוץ כדי לתאר בעיה מסוג זה, הוא לדעת מיהם השחקנים $\{1...N\}$, מה קבוצת האסטרטגיות של כל אחד מהם $S=\{S_1...S_N\}$, והתשלומים $P=\{P_1...P_N\}$, P_i: $S\rightarrow R$.
  דוגמה למשחק שכזה:
  השחקנים $\{I,II\}$
  האסטרטגיות $S_I=\{A,B\}$, $S_{II}=\{L,R\}$
  התשלומים:

	L	R
A	7,6	5,3
B	4,2	1,20

- רחבה – מתאר גם את סדר הפעולות במהלך המשחק, כאשר שחקן אחד בוחר אסטרטגיה לפני השני.
  ניתן לתאר גם משחק כזה בצורה נורמלית:
  $S_I=\{A,B\}$
  $S_{II}=\{(AL,BL),(AR,BL),(AL,BR),(AR,BR)\}$

	L	M	R
A	30,6	28,9	12,10
B	20,7	7,6	9,9
C	32,8	0,7	3,10
D	5,8	10,7	15,9

R היא <u>אסטרטגיה דומיננטית</u> של שחקן II, ולכן שחקן I יבחר באסטרטגיה D.

אסטרטגיה דומיננטית - $\hat{S}_i$ היא אסטרטגיה דומיננטית (שולטת) עבור שחקן i באם $P_i(\hat{S}_I,S_{-i})>P_i(S_i,S_{-i})$.

דילמת האסיר:

	L	R
A	50,50	10,60
B	60,10	25,25

הפתרון לבעיה זו נמצא במשבצת הימנית התחתונה, שהוא מפגש של שתי אסטרטגיות דומיננטיות. במצבי קונפליקט כאלה אנחנו לאו דווקא מגיעים למצב בו ממקסמים את כל התועלות.

נשנה מעט את המשחק שהצגנו קודם:

	L	M	R
A	~~30,6~~	~~28,9~~	12,10
B	~~20,7~~	~~7,10~~	~~9,9~~
C	~~32,8~~	~~0,7~~	~~3,10~~
D	~~5,8~~	~~10,7~~	**15,9**

L היא אסטרטגיה נשלטת על ידי R.

C ו-B נשלטות על ידי A.

M נשלטת על ידי R.

כעת היחיד שנותרה לו זכות בחירה הוא שחקן I, והוא יבחר ב-D.

ולכן שיווי המשקל מתקבל בנקודה (D,R).

שווי משקל NASH

יהיה $(s_1^*,s_2^*...s_N^*)$ כך שלכל i, $P_i(s_i^*,s_{-i}^*)>P_i(s_i,s_{-i})$. כלומר, אף אחד מהשחקנים לא יכול להרוויח משינוי באסטרטגיה שלו עצמו.

פונקצית תגובה

נקראת גם פונקצית התשובה הטובה ביותר. עבור כל סט החלטות של האחרים, הפונקציה הזו מחזירה את הבחירה הטובה ביותר לשחקן. $P_i(R(s_{-i}),s_{-i})\geq P_i(s_i,s_{-i})$. ניתן להגדיר באמצעות פונקציה זו את שו"מ נאש: לכל i מתקיים כי $s_i^*=R_i(s_{-i}^*)$.

אוליגופול

מרבית השווקים שאנו נפגשים עימם ביום יום הם שווקים שמאופיינים באוליגופול, 'תחרות בין מעטים'. מדובר על משחק בין הפירמות \ אינטרקציה אסטרטגית כאשר כל פעולה של שחקן אחד, משפיעה על הרווח של השחקנים האחרים. אחת הנקודות המעניינות – בניגוד לתחרות משוכללת, אין מודל אחד שאיתו ממדלים את כל השווקים, שיווי המשקל תלוי מאוד בשחקנים.

2 פירמות, מוצר הומוגני, תחרות כמויות – מודל Cournot:

$$\Pi_1(q_1, q_2)$$

שיווי משקל $nash$ - q_1^*, q_2^* - יתקיים כאשר:

$$\Pi_1(q_1^*, q_2^*) > \Pi_1(q_1, q_2^*)\ \forall q_1 \neq q_1^*$$

וכן תנאי דומה בעבור פירמה 2.

דוגמא:

פ' הביקוש:

$$P = a - b(q_1 + q_2)$$

הוצאות:

$$TC_i(q_i) = cq_i$$

שלב א' – פ' הרווח:

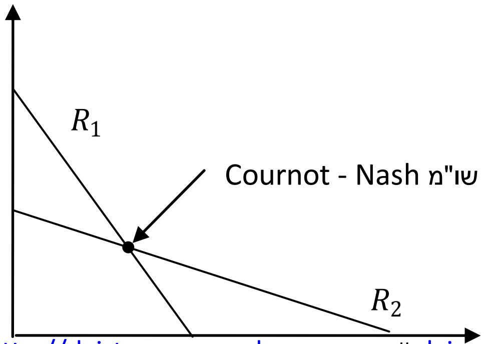
$$\Pi_1(q_1, q_2) = \big(a - b(q_1 + q_2)\big)q_1 - cq_1$$

שלב ב' – מציאת פ' תגובה:

$$\frac{\partial \Pi_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} = a - 2bq_1 - bq_2 - c = 0$$

$$R_1\colon q_1 = \frac{a - bq_2 - c}{2b}$$

לתזכורת- פ' התגובה מתארת כיצד הפירמה מגיבה לשינוי בכמויות של הפירמה האחרת. פ' התגובה יורדת – ככל שq_2 גדול יותר, כך q_1 קטן יותר.



$$q_1^* = q_2^* = \frac{a-c}{3b}$$

$$P^* = \frac{a+2c}{3}$$

$$\Pi^* = \frac{(a-c)^2}{9b}$$

בשווקים מסובכים יותר, יתכנו מספר נקודות שיווי משקל. במקרה המופיע כאן, שיווי המשקל הוא גם יציב. המשמעות היא, שמכל נקודה שבה נתחיל, שני השחקנים תמיד יתכנסו לשיווי משקל נאש. במקרה בו יש יותר משווי משקל אחד, שווי משקל שאינו יציב, יגרום לכך שזעזוע במערכת יגרום להתכנסות לשיווי משקל אחר.

ישנם מצבים בהם האפשרות להתחייב למשהו, משנה את כל המשחק. אם שחקן מסוים מחויב לייצר כמות מינימום מסוימת, הגדולה מהכמות בשו"מ נאש, לא נוכל להגיע לשיווי המשקל.

כעת ישנה פירמה השוקלת להיכנס לשוק, PE (potential enterer). פירמה זו צריכה לנתח את השוק, לחזות את שיווי המשקל שיווצר, ולראות אם הוא משתלם לה. דוגמה מציאותית לנושא זה הוא שוק הסלולר: במחירים שקיימים היום, כדאי להיכנס לשוק הסלולר – אך אף פירמה לא נכנסת לשוק זה, כיוון שהיא יודעת שאם היא תיכנס המחירים ירדו לרמה כזו כך שלא יהיה לה כדאי.

אם המצב הוא כזה כך שיש n פירמות בשוק:

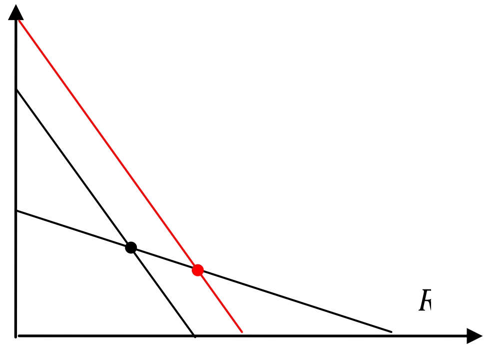
$$q_i^* = \frac{a - \sum_{j \neq i} q_j - c}{2b} = \frac{a - b(n-1)q_1^* - c}{2b}$$

$$q_i^*(n) = \frac{a-c}{b(n+1)}$$

$$P^*(n) = a - b \cdot n \cdot \frac{a-c}{b(n+1)} = \frac{ab(n+1) - abn + bnc}{b(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} c$$

$$\Pi^*(n) = (P^*(n) - c) \cdot q^*(n) = \cdots = \frac{(a-c)^2}{b(n+1)^2}$$

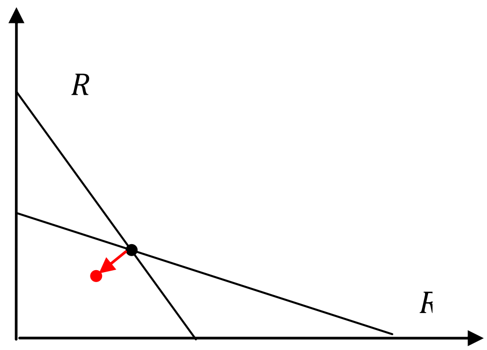
הפירמה מייצרת 200 יח' בעלות 8 ש"ח ליח'. ישנה השקעה בגובה F שמורידה את העלויות ל-2 ש"ח ליחידה. מהו F הכי גבוה שבעבורו הפירמה תהיה מוכנה להשקיע?



התזוזה יוצרת שיווי משקל חדש. יש לבדוק אם הרווח של הפירמה בשיווי המשקל החדש, גבוה מ-F.

קרטל

על ידי תיאום אסטרטגי (קרטל) ניתן להשיג רווח גדול יותר מאשר בשו"מ NASH.



אם הפירמות יצמצמו את הכמויות אותן הן מייצרות, הן יוכלו למקסם את הרווח של הקרטל. זוהי ההצדקה לקיומו של קרטל. עם זאת, הנקודה הממקסמת רווח אינה שיווי משקל, ולכל אחת מהפירמות בנפרד כדאי לסטות מאותה נקודה ולהגדיל את הכמויות. קרטל מסוג זה אינו יציב ונוטה להתפרק.

תחרות מחירים (תחרות ברטרנד)

- 2 חברות בתחרות סימולטנית.
- החברות קובעות את המחיר בו זמנית.
- החברות מיצרות מוצר הומוגני כלשהו (תחליפים מושלמים).
- ביקוש – $Q(P)$, כאשר $Q'(P)<0$.

ננתח שני מקרים:

1. המקרה הסימטרי- עלויות ייצור זהות לשתי החברות: $c(q)=c\cdot q$, כאשר c עלות ליחידה.
2. המקרה האסימטרי – עלויות ייצור שונות

המקרה הסימטרי

<u>תיאור המשחק:</u>

- אסטרטגיות: שתי חברות בוחרות בו זמנית במחירים: P_1, P_2
- תשלומים: צרכנים צופים ב-(P_1,P_2), ובוחרים לקנות מהחברה שהציעה מחיר נמוך יותר. אם המחירים זהים, הצרכנים מתחלקים שווה בשווה בין החברות.
  נגדיר: $Q_1(P_1,P_2)$ הביקוש שרואה חברה 1 בהינתן מחירים (P_1,P_2).

$$Q_1(p_1,p_2)=\begin{cases}Q(p_1), & p_1<p_2\\ \dfrac{Q(p_1)}{2}, & p_1=p_2\\ 0, & p_1>p\end{cases}$$
$$Q_2(p_1,p_2)=\begin{cases}Q(p_2), & p_1>p_2\\ \dfrac{Q(p_2)}{2}, & p_1=p_2\\ 0, & p_1<p_2\end{cases}$$
$$\pi_1(p_1,p_2)=(p_1-c)\cdot Q_1(p_1,p_2)$$
$$\pi_2(p_1,p_2)=(p_2-c)\cdot Q_2(p_1,p_2)$$

<u>שו"מ נאש:</u>

נניח כי חברה 2 קובעת מחיר $p_2>c$. מהי התגובה הטובה ביותר לחברה 1? חברה 1 תרצה לקבוע מחיר $p_2-\varepsilon$ כתגובה טובה ביותר.

למעשה לא יתכן שו"מ שבו $c<p_j<p_i$, שכן במצב זה פירמה i תרצה לחתוך את פירמה j.

כמו-כן, שו"מ בו $c=p_j<p_i$ גם לא יתכן, שכן אז ל-j כדאי לסטות כלפי מעלה, ול-i כלפי מטה.

לכן בשו"מ $\mathbf{p_1=p_2=c}$.

במודל בדיד (על בסיס אגורות), שיווי המשקל יהיה $p_1=p_2=c+1$.

לכן שיווי משקל של תחרות ברטרנד הוא:

$$\boldsymbol{p_1^*=p_2^*=c}$$

ובמודל זה:

$$\boldsymbol{\pi_1=\pi_2=0}$$

המקרה האסימטרי

- נניח כי לחברה 1 יש עלות נמוכה משל חברה 2: $c_1<c_2$.
- נסמן $p^m(c)$, מחיר מונופול בהינתן עלות c.
- נניח כי המחירים נקבעים ביחידות בדידות.

מקרה 1: $p^m(c_1)<c_2$. במקרה זה פירמה 2 לא שורדת.

מקרה 2: $p^m(c_1)>c_2$.

<u>שווי משקל נאש</u>

אינטואיטיבית ברור כי בשו"מ כל המכירות של החברה עם העלות הנמוכה (חברה 1), אשר תקבע מחיר בגובה c_2.
לא יתכן כי המחיר p_1 יהיה גבוה מ-c_2 כיוון שאז חברה 2 תרצה לחתוך את חברה 1.

באופן פורמלי, שיווי המשקל יהיה:

$$\boldsymbol{p_1^* = c_2 - 1, \qquad p_2^* = c_2}$$

$$(p_1^* = c_2, \qquad p_2^* = c_2 + 1)$$

ובמקרה זה:

$$\boldsymbol{\pi_1 \approx (c_2 - c_1) \cdot Q(c_2), \qquad \pi_2 = 0}$$

השוואה בין תחרות מחירים לתחרות כמויות

	מחירים	רווח	כניסת מתחרים
תחרות מחירים	שווה לעלות שולית	אפס	אין שינוי
תחרות כמויות	מעל עלות שולית	רווח חיובי	המחירים והרווח יורדים

למראית עין, מודל תחרות הכמויות הינו יותר מציאותי, כיוון שהוא מאפשר רווחים חיוביים לפירמות. אך במחשבה על תהליכים המתרחשים בפועל, הפירמות למעשה קובעות מחירים ולא כמויות. בתחרות כמויות ישנה הנחה שהמחיר נקבע מעצמו דרך הביקוש, אך השליטה על המחיר נמצאת בידי החברות.

עם זאת, במודל ברטרנד (תחרות מחירים) הנחה מובלעת היא שכל חברה יכולה לספק את כל הכמות המבוקשת בכל מחיר שמעל ל-c. כלומר, אין על אף חברה מגבלת קיבולת ייצור. לכן התמריצים לחתוך מחירים חזקים מאוד. כאשר ישנן מגבלות בקיבולת ייצור התמריץ לחתוך במחיר חלש הרבה יותר.

מסקנות:

1. מודל ברטרנד לא מתאים לתיאור של חברות כאשר יש לחברות מגבלת קיבולת יצור.
2. מודל קורנו מתאים יותר לתיאור תחרות כאשר יש מגבלות קיבולת. פורמלית אפשר להראות כי תוצאות שקולות למודל קורנו מתקבלות מהמשחק הדו שלבי:
   שלב 1: חברות בוחרות קיבולת ייצור.
   שלב 2: חבורת מתחרות במחירים תחת מגבלות קיבולת.

מוצרים מגוונים (דיפרנציאליים)

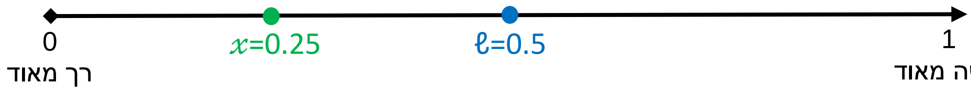
- בידול אופקי – לצרכנים שונים יש העדפות שונות למוצרים שונים.
- בידול אנכי (איכות) – כל הצרכנים מדרגים את המוצרים אותו דבר.

בידול אופקי

ניקח לדוגמה את שוק המזרונים. מזרונים נבדלים זה מזה ברמת הקושי שלהם, ואנשים שונים מעדיפים רמות קושי שונות.

נקודה על הקו תייצג מאפיינים של מוצר כלשהו.

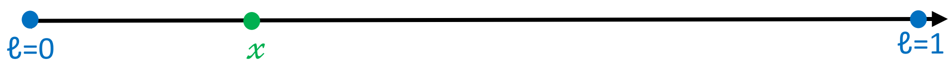
נקודה x על הקו מייצגת את המוצר האידיאלי עבור צרכן כלשהו.



המרחק $|\ell-x|$ הוא פרופורציוני לאובדן התועלת עבור צרכן x אם הוא קונה מוצר ℓ שאינו המוצר האידיאלי שלו.

נסמן את אובדן התועלת ב-$t\cdot|\ell-x|$, כאשר $t>0$ הוא ההפסד ליחידת מרחק.

נניח עכשיו שיש בשוק שתי חברות, שלכל חברה מוצר אחד: מוצר של חברה 1 ממוקם ב-ℓ=0, ומוצר של חברה 2 ממוקם ב-ℓ=1.



הצרכנים פרושים לאורך הקו באופן אחיד. נניח כי החברות קובעות מחירים (p_1,p_2) בו זמנית. נחפש את הביקוש שרואה כל חברה.

עבור צרכן הממוקם בנק' x, עלות הקניה מחברה 1:

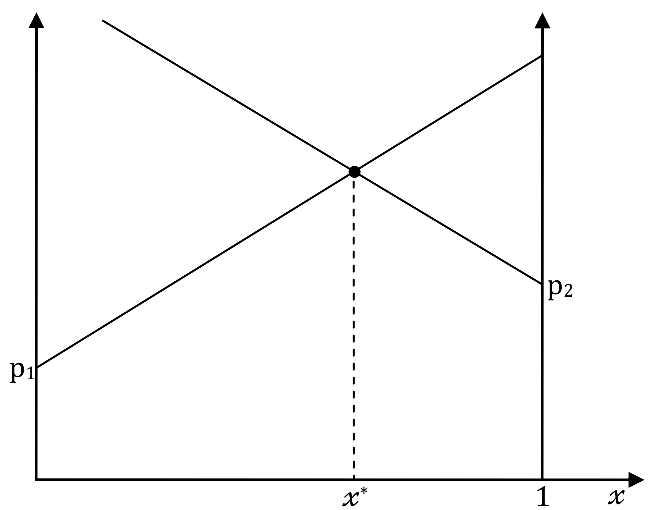
$$p_1 + t \cdot x$$

ועלות הקניה מחברה 2:

$$p_2 + t \cdot (1 - x)$$

צרכן יקנה מחברה שעלות הכוללת של הרכישה ממנה נמוכה יותר.

מכאן ניתן לגזור את פונקצית הביקוש:



כל הצרכנים שמימין ל-x^* יקנו בפירמה 2, ואלו שמשמאלו יקנו בפירמה 1. נמצא פורמלית את x^*:

$$p_1 + t - x^* = p_2 + t(1 - x^*)$$

$$2tx^* = t + p_2 - p_1$$

$$x^* = \frac{1}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2t}$$

ביקושים:

$$Q_1(p_1, p_2) = x^*$$

$$Q_2(p_1, p_2) = (1 - x^*)$$

ולכן:

$$p_1 = p_2 \Rightarrow Q_1 = Q_2 = \frac{1}{2}$$

$$p_2 > p_1 \Rightarrow Q_1 > \frac{1}{2} > Q_2$$

מידול כללי של ביקוש למוצרים מגוונים

$$Q_1(p_1, p_2) = A_1 - b_1 p_1 + d_1 p_2$$

$$Q_2(p_1, p_2) = A_2 - b_2 p_2 + d_2 p_1$$

ספציפית, נניח כעת:

$$Q_1 = A - p_1 + 0.5p_2$$

$$Q_2 = A - p_2 + 0.5p_1$$

כלומר, עליה במחיר של החברה השניה מגדילה את הביקוש העצמי בחצי.

<u>הגדרת המשחק:</u>

- חברות קובעות מחירים סימולטאנית.
- הביקושים נקבעים לפי פונקציות הביקוש Q_1, Q_2.
- נניח כי לחברות עלויות ליחידה c_1 ו-c_2.

<u>ננתח שו"מ נאש:</u>

בהינתן p_2, חברה 1 פותרת:

$$\max_{p_1} \pi_1 = \max_{p_1}(p_1 - c_1) \cdot Q_1(p_1, p_2) = \max_{p_1}(p_1 - c_1) \cdot (A - p_1 + 0.5p_2)$$

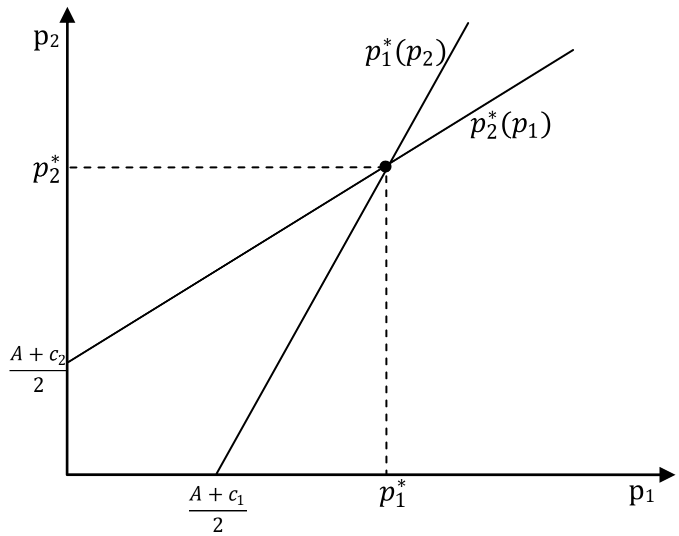
$$\frac{\partial}{\partial p_1}: A - p_1^* + 0.5p_2 - (p_1^* - c_1) = 0$$

$$\Rightarrow p_1^*(p_2) = \frac{A + c_1}{2} + \frac{p_2}{4}$$

זוהי פונקצית התגובה הטובה ביותר של פירמה 1. בצורה דומה:

$$p_2^*(p_1) = \frac{A + c_2}{2} + \frac{p_1}{4}$$

נצייר:



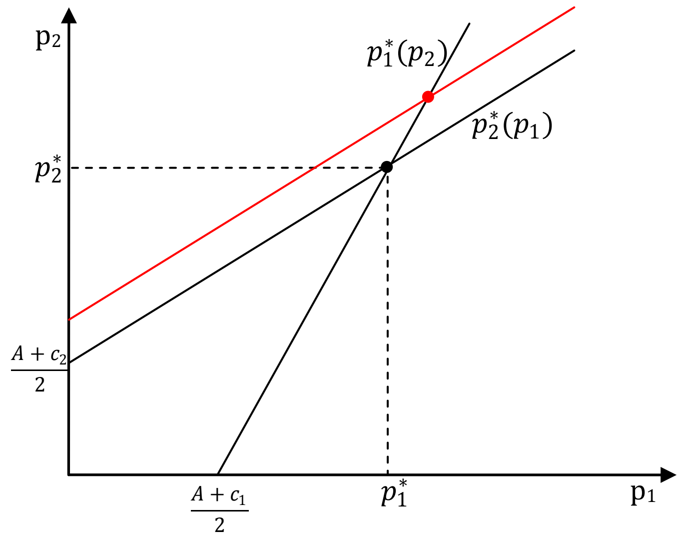
נציב את המשוואות זו בזו ונקבל:

$$p_2^* = \frac{10A + 8c_2 + 2c_1}{15}$$

$$p_1^* = \frac{10A + 8c_1 + 2c_2}{15}$$

מעניין לראות שמחירי שיווי המשקל עולים בעלויות של שתי החברות.

נניח שהיתה עליה ב-c_2:



תמריצים, אסטרטגיה אגרסיבית, מחויבות רכה

נביט על שוק פשוט, עם שתי פירמות:

$$P = 12 - (q_1 + q_2)$$

$$TC_i = 2q_i$$

$$\pi_1 = (12 - q_1 - q_2)q_1 - 2q_1$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 12 - 2q_1 - q_2 - 2 = 0$$

$$R_1: q_1 = \frac{10 - q_2}{2}$$

$$R_2: q_2 = \frac{10 - q_1}{2}$$

שו"מ Nash:

$$q_1^* = q_2^* = \frac{10}{3}$$

$$P^* = 12 - \frac{20}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\pi^* = \frac{100}{9}$$

כעת נשנה מעט את הסיפור: נניח שפירמה 1 נמצאת במדינה A, ופירמה 2 במדינה B. פירמות אלה מתחרות בשוק העולמי. ההוצאות הן אותן הוצאות, והביקוש הינו אותו הביקוש בשוק העולמי.

כעת מדינה A נותנת לפירמה 1 סובסידיה בגודל 2 ש"ח ליח'. נמצא את שיווי המשקל בשוק:

$$R_2: q_2 = \frac{10 - q_1}{2}$$

$$\pi_1 = (12 - q_1 - q_2)q_1 - 2q_1 + 2q_1$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1}: 12 - 2q_1 - q_2 = 0$$

$$\hat{R}_1: q_1 = \frac{12 - q_2}{2}$$

$$2q_1 = 12 - \left(5 - \frac{q_1}{2}\right)$$

$$\hat{q}_1 = \frac{14}{3}$$

$$\hat{q}_2 = \frac{8}{3}$$

$$\hat{P} = \frac{14}{3}$$

$$\hat{\pi}_1 = \left(\frac{14}{3}\right)^2 = \frac{196}{9}$$

הרווח של פירמה 1 עלה.

התחלפה הממשלה במדינה A, והיא רוצה בחזרה את הסובסידיה.

$$S = \frac{14}{3} \cdot 2 = \frac{28}{3} \Rightarrow \frac{30}{3} \ (\text{כולל קנס})$$

$$\hat{\hat{\pi}}_1 = \frac{196}{9} - \frac{30}{3} = \frac{106}{9}$$

הרווחים של פירמה 1 עדיין גבוהים יותר, וגם הממשלה הרוויחה את הקנס. איך ניתן להסביר את התוצאה הזו?

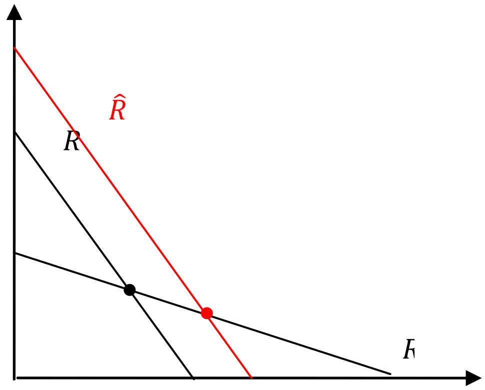
שני השחקנים סימטריים לחלוטין, מלבד פונקצית המטרה שלהם. פירמה 1, בפועל, ממקסמת *פדיון*. התוצאות בפועל (ללא קנס):

$$\hat{\hat{\pi}}_1 = \left(\frac{14}{3} - 2\right) \cdot \frac{14}{3} = \frac{112}{9}$$

$$\hat{\hat{\pi}}_2 = \left(\frac{14}{3} - 2\right) \cdot \frac{8}{3} = \frac{64}{9}$$

המסקנה המתקבלת: בשוק אולוגופוליסטי, על מנת למקסם רווח, לא צריך למקסם רווח. כלומר, הפירמה הממקסמת פדיון מרוויחה יותר מהפירמה הממקסמת רווח.

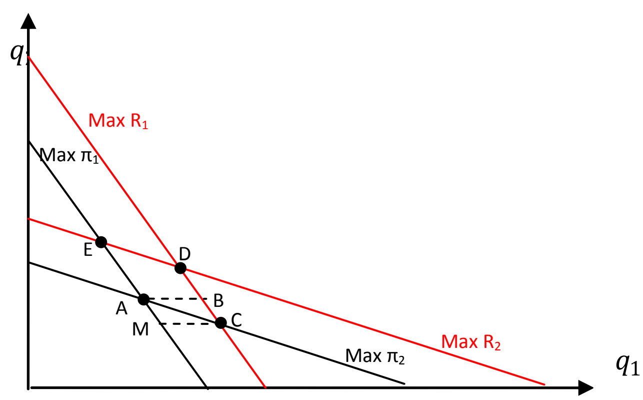
האינטואציה שלנו בנויה על בעית מקסימיזציה של פרט בודד. מאוד קשה לבנות אינטואציה אחרת. האינטואציה שאומרת שכדי למקסם רווח – צריך למקסם פונקצית רווח, היא מאוד חזקה. חלק גדול מההבנה של כלכלה נובעת מהשפעה של תמריצים ושינוי בהם. מה שראינו בדוגמה זו הוא טיפוסי למדי לשווקים אוליגופוליסטים מסוג כזה.



למעשה, הסבסוד הנ"ל מקביל למתן תמריץ למנהליםהמבוסס על פדיון, על מנת לעודד התנהגות אגרסיבית- עבור כל כמות של המתחרה, אני אייצר יותר ואוריד את המחירים יותר. ישנה חשיבות גדולה יותר*למבנה* התמריצים מאשר *לגובה*. מדוע התנהגות אגרסיבית מגדילה את הרווח? הזזה של העקומה ימינה בε גורמת ל:

$$\partial\pi_1 = \overbrace{\frac{\partial\pi_1}{\partial q_1}\partial q_1}^{\varepsilon\cdot\varepsilon\to 0} + \overbrace{\overset{<0}{\frac{\partial\pi_1}{\partial q_2}}\overset{<0}{\partial q_2}}^{>0} > 0$$

במשחק הזה, אסטרטגיה אגרסיבית היא win-lose: פירמה אחת מרוויחה, והשניה מפסידה.



הרווח לא מגיע מהגדלת הכמות, אלא מהקטנת הכמות של הפירמה השניה. אם הפירמה השניה מתנהגת בצורה קבועה, הכי טוב לי למקסם את הרווח.

1/2	Max π	Max R
Max π	A	E
Max R	C	D

$$\pi_A > \pi_B$$

$$\pi_C > \pi_A$$

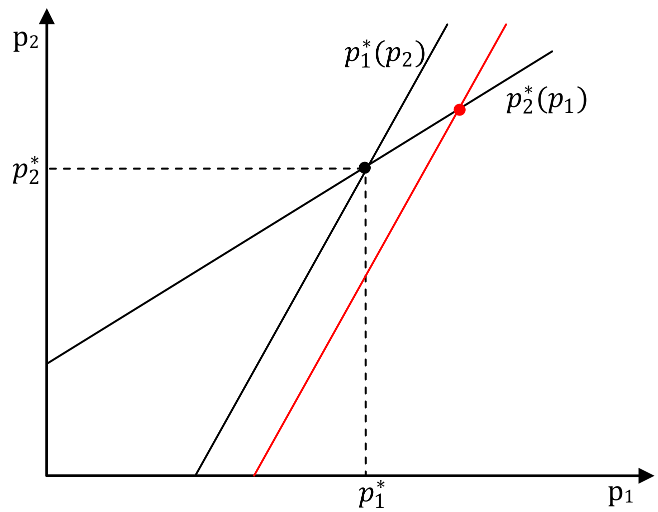
$$\pi_C < \pi_M$$

מיקסום פדיון הוא אסטרטגיה דומיננטית ו-D הוא שיווי משקל, אך הנקודה הרווחית ביותר לשתי הפירמות היא A. ב-D, הרווח שנובע מההתנהגות האגרסיבית קטן יותר מההפסד שנגרם מההתנהגות האגרסיבית של הצד השני.

תגמול אופציות: בעלי המניות, הסיכון שלהם מפוזר. אך המנכ"ל, מקום העבודה שלו והמוניטין שלו תלוי במאה אחוז במקום העבודה. לכן המנהלים היו שונאי סיכון הרבה יותר מהבעלים, ולקחו רק פרויקטים בעלי סיכון נמוך. תגמול האופציות נולד כיוון ששווי האופציה עולה ככל שהשונות שלה עולה. כך, המנהלים מתקרבים לעמדת הבעלים מבחינת לקיחת הסיכונים.

עם זאת, אם תמריצי המנהלים תלויים גם ברווח הפירמה וגם ברווח הענפי, מקבלים התנהגות קרטלית: תוספת הרווח של המנהלים תלוי בתוצאות הענף כולו, פונקציות התגובה יורדות, רווחי הענף כולו עולים אך רווחת הציבור יורדת.

בתחרות ברטרנד (תחרות מחירים), במקום אסטרטגיה אגרסיבית, הולכים לכיוון הפוך: ככל שמתחרה מעלה את המחיר, גם אני מעלה את המחיר. זה נקרא מחויבות לאסטרטגיה רכה.



$$\partial\pi_1 = \overbrace{\frac{\partial\pi_1}{\partial p_1}}^{\varepsilon\cdot\varepsilon\to 0}\partial p_1 + \overset{>0}{\frac{\partial\pi_1}{\partial p_2}}\overset{>0}{\partial p_2} > 0$$

תחרות כזו שוררת בשוק התעופה באמצעות מועדוני הנוסע המתמיד; או ברפורמה בשיחות הבינלאומית שהתחוללה לפני מספר שנים, אשר דרשה מכל לקוח לבחור לאיזה ספק להיות "מנוי". כאשר השוק מפולח למועדוני לקוחות, כך שהלקוחות מעדיפים חברה מסוימת גם אם מחיריה גבוהים יותר (בעקבות ההטבה הנובעת מהחברות במועדון), הפירמות יכולות להעלות מחירים בלי לפגוע בכמות לקוחותיהן.

המיוחד ב-soft commitment הוא שהיא מצב של win-win: אם צד אחד מעלה מחירים, גם הצד השני מעלה מחירים. למעשה, הצד השני מרוויח *יותר*.

בסוף שנות השמונים תחרות המחירים בענף המכוניות בארה"ב היתה כה עזה שהיא גרמה לכך שהחברות כמעט לא הרוויחו. באמצע שנות התשעים הודיעה GM שהיא חוברת לבנק והם מוציאים כרטיס אשראי, הפועל בצורה הבאה: אתה רוכש בכרטיס וצובר נקודות. בנקודות הללו ניתן להשתמש כנגד קנית הרכב הבא מ-GM. שווי הנקודות היה משמעותי: מחיר המכונית יכול היה לרדת בגובה של עד 3000$. זה היה כרטיס האשראי המוצלח ביותר בהיסטוריה של ארה"ב מבחינת היקף השימוש. GM לא הרוויחה מהשימוש בפועל בכרטיס האשראי.

הסיפור מאחורי הקלעים היה דומה לזה שבענף השיחות הבינלאומיות: אני נותן הנחה רק למי שבכל מקרה קונה ממני. מי שהוציא את כרטיס האשראי הזה, מראש התכוון לקנות רכב של GM – ועוד הרצון שלו התחזק עקב ההנחה מכרטיס האשראי. אחרי שההנחה כבר הוענקה, ל-GM לא היה תמריץ להוריד מחירים: אלא להעלות! מיד אחרי GM כל היצרניות האחרות הוציאו כרטיסי אשראי דומים, וכתוצאה ממבצע כרטיס האשראי הזה, עלו מחירי המכוניות ביותר מ-3000$.

במשחק מסוג קורנו, ישנו First Mover Advantage: השחקן שפועל ראשון מרוויח. במשחק מסוג ברטרנד, יש Second Mover Advantage: יש יתרון למי שפועל שני. במשחק הראשון, אם השחקן השני מעתיק ממך את האסטרטגיה, מצבך מורע אפילו ביחס לנקודה ההתחלתית (strategic substitute). במשחק השני, אם השחקן השני מעתיק, מצבך משתפר (strategic complementary).

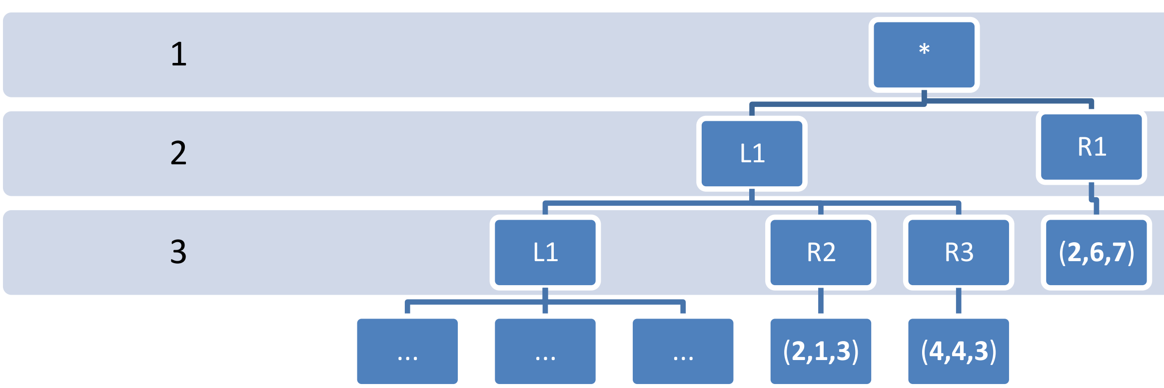
צורת הניתוח כולה משתנה בהתאם למשחק בו מדובר. נניח בתחילה היו קיימות במשק פירמות A, B ו-C. A ו-B מתמזגות. הפירמה הממוזגת מפנימה את ההשפעות החיצוניות ביניהן, ולכן מעלה את המחירים ומורידה את הכמויות. פירמה C בתגובה *תגדיל* את הכמות ותעלה את המחיר. במשחק מסוג קורנו, המרוויחה מהמיזוג היא C! הפנמת ההשפעות החיצוניות הועילה פחות לפירמה הממוזגת מאשר הנזק שנגרם לה מהשינוי בשוק. בתחרות ברטרנד, עם זאת, העלאת המחירים גרמה לעלייה בתועלת גם ל-C וגם לפירמה הממוזגת. על אותו מבנה שוק בדיוק, קיבלנו תוצאות שונות בתכלית – בהתאם לסוג המשחק.

משחקים סדרתיים (משחקים בצורה רחבה)

בנושא זה נתמקד במשחקים בהם יש לנו אינפורמציה מלאה, כיוון שהם פחות מסובכים לניתוח. האינפורמציה המלאה היא לגבי:

- התשלומים
- המהלכים שנעשו במשחק.

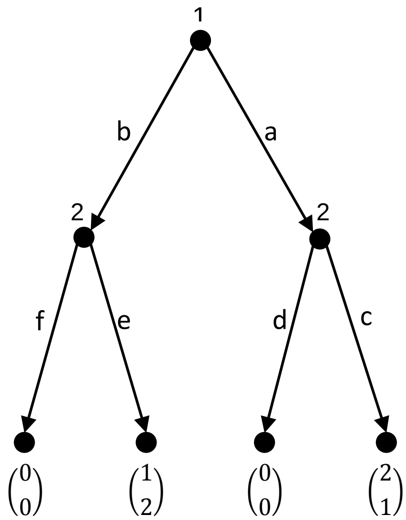
במשחקים פשוטים נעזרנו במטריצה. כלי הניתוח המרכזי שלנו במשחקים סדרתיים הוא עץ המשחק. עץ משחק תמיד מתחיל בקודקוד יחיד. נניח משחק בן שלושה שחקנים, בו כל פעם משחק שחקן אחד.



לכל קודקוד במשחק אפשר להגיע רק מקודקוד שקודם לו. ב"עלי העץ", להם אנו קוראים קודקוד סופי, רשומים התשלומים שהם תוצאת המשחק.

יתכן מצב של מהלכים סימלוטניים בתוך משחק סדרתי: השחקן הראשון בוחר באיזה משחק סימולטני ישחקו השחקנים.

נביט על עץ המשחק שמשמאל.



<u>אסטרטגיות אפשריות:</u>

1 – a או b.

2 – (d,f) , (d,e) , (c,d) , (c,e)

כאשר הסוגריים מייצגים (פעולת 2 אם b,פעולת 2 אם a).

תיאור זה אינו מתאר את האופי האמיתי של המשחק.

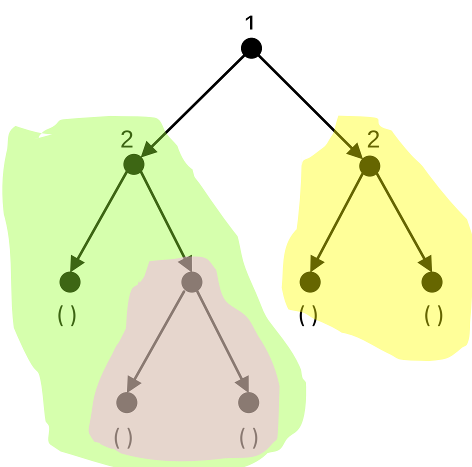
נביט בזוג אסטרטגיות (אחת לכל שחקן):

- b לשחקן 1.
- (d,e) לשחקן 2.

האם האסטרטגיות הן תגובה טובה ביותר זו כנגד זו? כן.

אך ניתן להביט על אסטרטגיה זו גם מכיוון אחר: שחקן 2 לא יבחר בכוונה תחילה להפסיד, מה שיקרה אם אכן הוא יבחר d אחרי ש-1 יבחר a. לכן ניתן להציג את (d,e) כמייצגת **איום לא אמין** של שחקן 2 על שחקן 1 לשחק d במידה ושחקן 1 ישחק a.

שיווי משקל פרפקטי

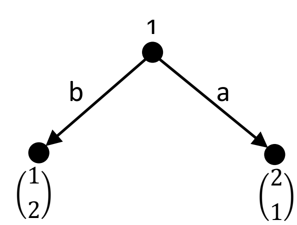


על כל עץ משחק ניתן לזהות תתי משחקים. תת משחק הוא כמו משחק שלם: חלק מעץ המשחק המתחיל בקודקוד יחיד ומכיל את כל הקודקודים והענפים מתחתיו.

הרעיון של <u>שיווי משקל פרפקטי</u> הוא שבכל תת משחק הפעולות של השחקנים הן אופטימליות (זו כנגד זו).

<u>אינדוקציה לאחור</u> נותנת את שו"מ פרפקטי במשחק סופי בו בכל שלב צועד שחקן יחיד. מתחילים מעלי העץ. בכל תת משחק בוחרים את האפשרות הטובה ביותר עבור כל השחקנים, ואז "מקפלים" את העץ כלפי מעלה, כך שנראה את תוצאות המשחק עבור כל בחירה של שחקן 1.

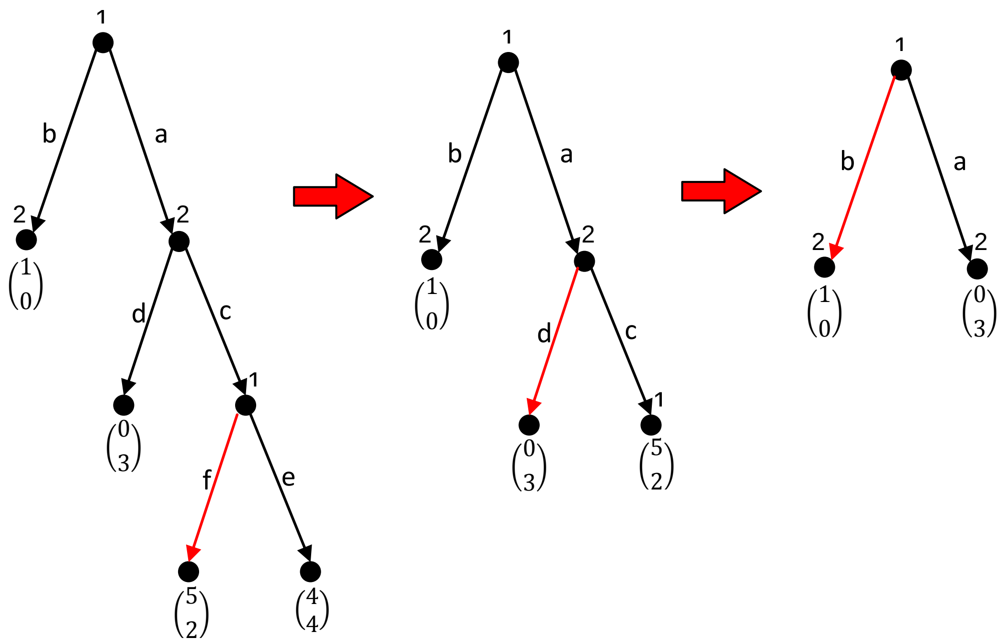
אם נבצע תהליך זה עבור המשחק שלעיל, זו תהיה התוצאה:



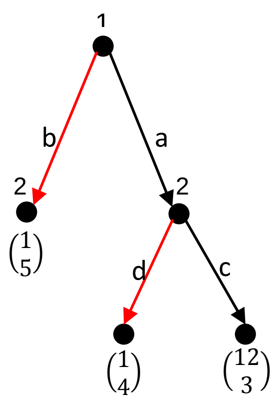
בסופו של דבר נקבל שיווי משקל פרפקטי יחיד: a, (c,e).

מהלך המשחק יהיה a ← c, והתשלומים $\binom{2}{1}$.

דוגמה נוספת:



שווי המשקל הפרפקטי של משחק זה, אם כך, הוא (b,f) עבור שחקן 1 ו-d עבור שחקן 2. יש לציין ששחקן 1 לעולם לא ישחק f כיוון שהוא מסיים את המשחק כבר ב-b, אך שיווי המשקל מתייחס גם למה ששחקן 2 *מצפה* ששחקן 1 יעשה.

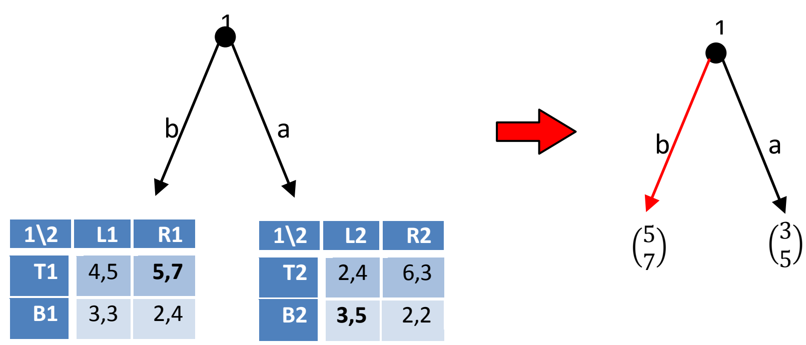


יתכן גם משחק בו יהיה ריבוי שיווי משקל:

במקרה כזה שחקן 1 יהיה אדיש לאפשרויות ויהיו שני שיווי משקל פרפקטיים – (a,d) ו-(b,c).

הדוגמה האחרונה אליה נתייחס היא משחק הכולל שלבים סימולטאניים:

ראשית פותרים את המשחק הפשוט (באמצעות שו"מ נאש), ואז מציבים חזרה.



1\2	L1	R1
T1	4,5	**5,7**
B1	3,3	2,4

1\2	L2	R2
T2	2,4	6,3
B2	**3,5**	2,2

משחק כניסה ותחרות ברטרנד

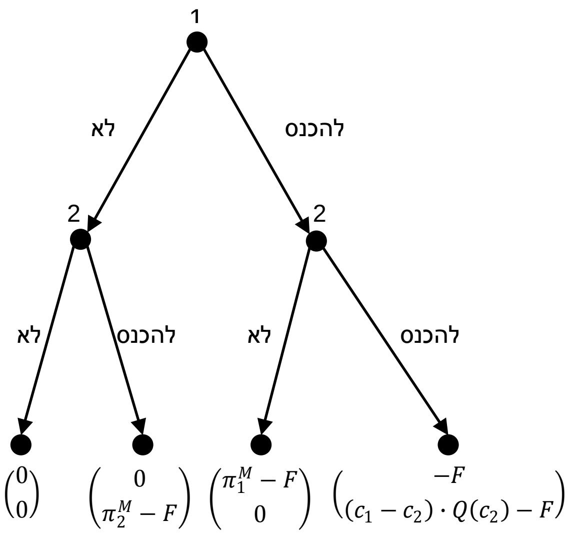
- שוק חדש
- שתי חברות שיכולות להיכנס לשוק. עלות הכניסה לשוק F>0.

- חברה 1: עלות ליחידה C_1.
- חברה 2: עלות ליחידה C_2 כאשר $C_1>C_2$.

מהלך המשחק:

- שלב 1: חברה 1 בוחרת ראשונה אם להיכנס לשוק (ולשלם F).
- שלב 2: חברה 2 צופה בהחלטה של חברה 1 ומחליטה אם להיכנס בעצמה.
- שלב 3: אם שתי החברות נכנסו, הן מתחרות תחרות מחירים סימולטנית. אם נכנסה חברה יחידה, היא מונופול. אם אף חברה לא נכנסה, תשלום 0 לכל חברה.

הנחה: $\pi^M_1, \pi^M_2>F$, כלומר, לכל אחת מהחברות יהיה רווחי להיכנס כמונופול.



נתחיל בניתוח בשלב 2/3, במקרה שבו שתי החברות נכנסו (דואופול).

בשו"מ שתי החברות קובעות מחיר $p_1=p_2=c_1$ (שווה לעלות של החברה הלא יעילה), וכל המכירות הן של החברה היעילה (2). הרווח התפעולי של חברה 2: $(c_1-c_2)\cdot Q(c_1)$.

הרווח התפעולי של חברה 1: 0.

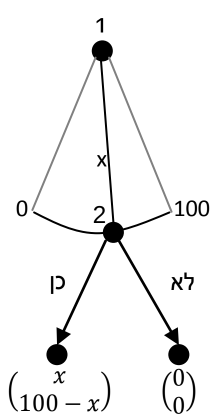
ממבט על הגרף:

- חברה 2 תיכנס אם חברה 1 לא נכנסה.
- חברה 2 תיכנס אם חברה 1 נכנסה, אך ורק אם רווחיה יהיו גבוהים מ-F.

ניתוח שלב 1 הוא בדיוק הפוך:

חברה 1 תיכנס אמ"מ רווחי חברה 2 בדואופול קטנים מ-F, כלומר, רק אם מובטח לה שחברה 2 לא תיכנס אחריה.

משחק חלוקה (אולטימטום)



זוג שחקנים מקבלים סכום כסף (100 ש"ח) לחלוקה ביניהם.

- שחקן 1 מציע חלוקה (x,100-x), כאשר x≤99.
- שחקן 2 יכול לקבל את החלוקה המוצעת, או לסרב לה,במקרה זה שני השחקנים מקבלים 0.

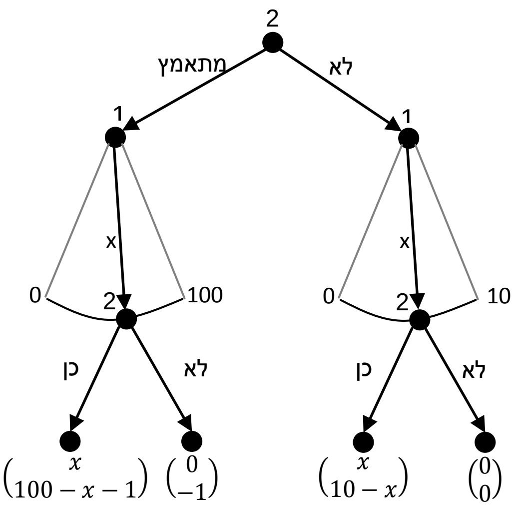
אינדוקציה לאחור:

- בהינתן הצעת חלוקה (x,100-x) כלשהו, שחקן 2 משווה בין האפשרות לקבל 100-x לבין 0.
- לפיכך, שחקן 2 יקבל כל הצעת חלוקה.
- מכאן נובע, ששחקן 1 ידרוש לעצמו את הנתח המקסימלי, כלומר יציע (99,1).

זוהי תוצאה שאינה מתיישרת עם העולם האמיתי, שכולל גם מניעים בלתי רציונליים, כמו אגו, התחשבות וכד'.

נרחיב את המשחק לכלול שלב מאמץ:

בשלב 1 שחקן 2 ("עובד") יכול להתאמץ ולהגדיל את ה"עוגה" שיש לשחקנים לחלוקה.



- אם הוא מתאמץ לשחקנים יש 100 ש"ח.
- אם הוא לא מתאמץ לשחקנים יש 10 ש"ח.

עלות מאמץ (ביח' כסף) היא 1.

ע"פ התוצאות הקודמות, אנו יודעים כי בכל מקרה שחקן 1 יציע לשחקן 2 שקל אחד, בין אם 2 התאמץ והעוגה היא 100, ובין אם לאו.

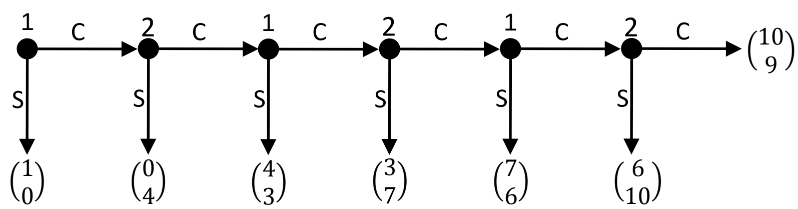
לפיכך, נובע ששחקן 2 יבחר לא להתאמץ ולקבל תשלום של 1.

יש לשים לב: המשחק אותו אנו מנתחים לא כולל התחייבויות מראש של השחקנים (מלבד "איומים" שיכולים להיות אמינים או לא). ולכן 1 לא יכול להתחייב מראש לחלוקה כלשהי ל-2.

בעיה זו נקראת בספרות בעית holdup, או אופורטוניזם.

משחק "מרבה רגליים"

כללי המשחק: שלב שבו שחקן ממשיך – נוספים 3 שקלים לעוגה. בכל שלב שבו בוחר שחקן לצאת, הוא מקבל תוספת 3 שקלים, ולשחקן השני יורד 1 מהסכום שיכול היה לקבל קודם.



במשחק מסוג זה, שיווי משקל פרפקטי באינדוקציה לאחור, נותן שכל שחקן עוצר אם תורו מגיע לשחק, ולכן המשחק נעצר בשלב הראשון, והתשלומים הם (1,0). זאת למרות שיש פוטנציאל גדול לתשלומים וסכנה יחסית קטנה.

מהלכים אסטרטגיים והתחייבות מוקדמת

הרתעת כניסה – אוסף של התנהגויות אסטרטגיות שחברות מבוססות יכולות להשתמש בהן, כדי להרתיע מתחרים חדשים מכניסה לשוק.

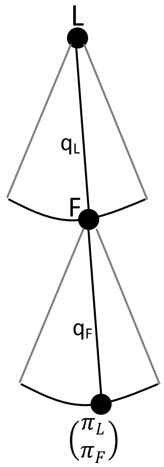
- הרחבת קיבולות ייצור – החברה הקיימת מרחיבה את קיבולת הייצור שלה כך, שאם תרצה להגדיל את הכמויות אותה היא מייצרת, היא לא תצטרך לשאת בעלויות נוספות. אם ירצה מתחרה להיכנס לשוק תוכל החברה הקיימת להציף את השוק במחיר זול וכך למנוע ממנו להיכנס.
- קשירת מוצרים – תופעה בה חברה בה יש לה כוח שוק בשוק אחד, מנסה למנף כוח זה גם לשוק אחר. לדוגמה, מיקרוסופט שקושרת דפדפן ונגן מדיה למערכת ההפעלה או קודאק שקשרה קנית סרט צילום עם פיתוח. הקשירה מחייבת התנהגות אגרסיבית שאינה תמיד אופטימלית לפירמה, אך בטווח ארוך מונעת כניסת מתחרים.

משחקי הובלה

<u>משחק כמויות סדרתי (סטקלברג, מוצרים הומוגניים)</u>

החברה שנכנסה ראשונה היא החברה המובילה L. חברה L בוחרת כמות שאותה תייצר, q_L.

חברה F, החברה המגיבה, צופה בבחירה של q_L ובוחרת את כמות q_F שתייצר בעצמה.



המחיר נקבע להיות $P(q_L+q_F)$, כאשר $P=a-q$ היא פונקציית הביקוש ההופכית.

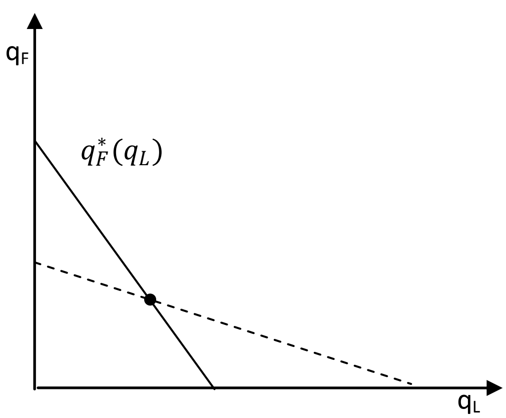
לשתי החברות עלות קבועה ליחידה c.

ננתח ראשית את התגובה של חברה F לבחירה q_L, ולאחר מכן ננתח את הבחירה של L.

$$\max_{q_F} \pi_F = q_F(P(q_F+q_L)-c)$$

ההבדל העיקרי ממודל קורנו, הוא שפה הפירמה העוקבת כבר *יודעת* מה הכמות שבחרה הפירמה המובילה. מפתרון הבעיה מקבלים פונקצית תגובה אופטימלית כמו במודל קורנו.

$$q_F^*(q_L) = \frac{a-c}{2} - \frac{q_L}{2}$$



כעת ננתח את בעית חברה L. הקו המרוסק בתרשים מהווה פונקצית תגובה מדומה של L. במשחק סימולטני, תוצאת המשחק היתה נופלת בנקודת המפגש המודגשת. אבל כיוון שמדובר במשחק סדרתי, חברה L יכולה פשוט לבחור נקודה על פונקצית התגובה של F כרצונה. התוצאה הצפויה היא ש-L תייצר יותר מאשר בשיווי משקל סימולטני.

ננתח את הבעיה באופן פורמלי:

$$\max \pi_L = \overset{(1)+}{q_L}\left(P\left(\overset{(2)-}{q_L} + \overset{(3)}{q_F^*(q_L)}\right) - c\right)$$

(3), האפקט האסטרטגי הוא השינוי בבחירה של L כתוצאה מהבחירה של F. הסימן שלו הוא שיקבע כמה L תבחר ליצר. תנאי סדר ראשון:

$$\overbrace{P(Q)-c}^{(1)} + \overbrace{q_L \cdot \frac{\partial P}{\partial q_L}}^{(2)} + \overbrace{q_L \cdot \frac{\partial P}{\partial q_F} \cdot \frac{\partial q_F^*}{\partial q_L}}^{(3)} = 0$$

בנק' של שיווי משקל סימולטני, אנחנו כבר יודעים משו"מ קורנו שאלמנטים (1) ו-(2) שווים 0. נראה שאלמנט (3) לא שווה 0 בשו"מ סימולטני, כך ש-L תגדיל כמויות מעבר לנקודה זו על מנת להגיע לאופטימום.

$$\frac{\partial P}{\partial q_F} = ? \Rightarrow P = a - q_L - q_F \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial q_F} = -1$$

$$\frac{\partial q_F^*}{\partial q_L} = ? \Rightarrow q_F^* = \frac{a-c}{2} - \frac{q_L}{2} \Rightarrow \frac{\partial q_F^*}{\partial q_L} = -\frac{1}{2}$$

ולכן, האפקט האסטרטגי נראה כך:

$$q_L \cdot \frac{\partial P}{\partial q_F} \cdot \frac{\partial q_F^*}{\partial q_L} = q_L \cdot -1 \cdot -\frac{1}{2} = \frac{1}{2} q_L$$

ולכן, בנקודת שיווי המשקל הסימולטני, האפקט האסטרטגי הוא חיובי. כלומר, כדי שהחברה המובילה תגיע ל-0, היא צריכה לייצר יותר.

<u>מסקנה</u>: מכיוון שהאפקט האסטרטגי הוא חיובי, L תבחר כמות הגדולה מכמות קורנו.

נחשב את שיווי המשקל. נציב את הביקוש בתס"ר:

$$a - q_L - q_F^* - c - q_L + \frac{1}{2} q_L = 0$$

$$a - 2q_L - q_F^* - c + \frac{q_L}{2} = 0$$

נציב את q_F^*:

$$a - c - \frac{3q_L}{2} - \left(\frac{a-c}{2} - \frac{q_L}{2}\right) = 0$$

$$\boldsymbol{q_L^* = \frac{a-c}{2}}$$

$$\boldsymbol{q_F^* = \frac{a-c}{4}}$$

ולכן, במודל סדרתי:

$$q_F^* < q^C < q_L^*$$

כמו כן:

$$q_L^* + q_F^* = \frac{a-c}{2} + \frac{a-c}{4} = \frac{3}{4}(a-c)$$

הכמות הכוללת גבוהה יותר מאשר במודל סימולטאני, והמחיר נמוך יותר.

מבחינת הרווח:

$\pi_L^* > \pi^*$ - העדפה נגלית

$\pi_F^* < \pi^*$ - מייצרת פחות והמחיר ירד

<u>משחק מחירים סדרתי (במוצרים מגוונים)</u>

שתי החברות L ו-F מייצרות מוצרים תחליפיים לא מושלמים.

$$Q_L(p_L, p_F) = a - p_L + \frac{1}{2}p_F$$

$$Q_F(p_L, p_F) = a - p_F + \frac{1}{2}p_L$$

נניח כי L בוחרת ראשונה במחיר P_L. F צופה בבחירה של L ובוחרת במחיר שלה P_F. המצב של התחייבות למחיר הוא קצת בעייתי ויש צורך להסביר אותו, למשל, באמצעות שמירה על מוניטין של החברה.

בעית חברה F:

$$\max(p_F - c) \cdot Q(p_L, p_F)$$

כפי שראינו, מתקבלת פונקצית תגובה אוטומטית:

$$p_F^*(p_L) = \frac{a+c}{2} + \frac{p_L}{4}$$

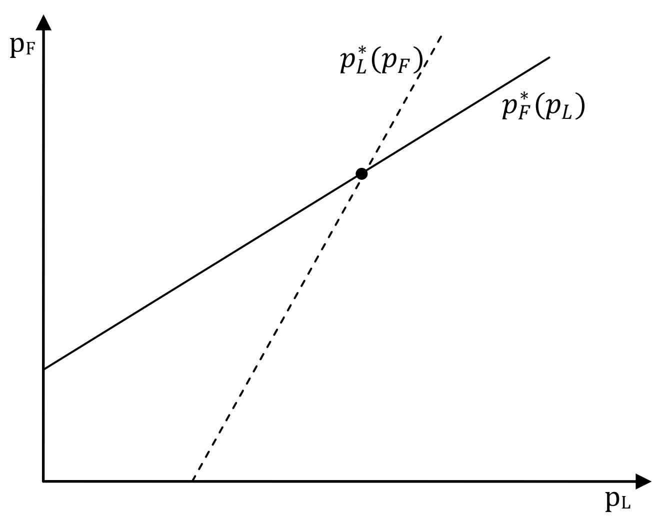
בדיוק כמו קודם, פירמה L פשוט "בוחרת" נקודה על פונקצית התגובה של פירמה F.

$$\max(p_L - c) \cdot Q\left(p_L, p_F^*(p_L)\right)$$

תס"ר:

$$Q_L + (p_L - c) \cdot \frac{\partial Q_L}{\partial p_L} + (p_L - c) \cdot \frac{\partial Q_L}{\partial p_F} \cdot \frac{\partial p_F}{\partial p_L} = 0$$

מכיוון שסימן האפקט האסטרטגי הוא +, נובע כי בש"מ פרפקטי של משחק סדרתי, המחירים של שתי החברות יהיו גבוהים מאשר המחירים במשחק הסימולטני.



הגבלה גורמת לריכוך תחרות ולעלית מחירים ולפגיעה בצרכנים, בשונה ממודל הכמויות. מפונקצית התגובה נובע:

$$p^* < p_F^* < p_L^*$$

לגבי הרווחים:

$\pi_L^* > \pi^*$ מהעדפה נגלית

החברה המגיבה יכלה לבחור מחיר כמו בש"מ נאש אך בכל זאת עשתה אופטימיזציה והעלתה אותו $\pi_F^* > \pi^*$

$$\pi_F^* > \pi_L^*$$

אם F היתה בוחרת מחיר זהה ל-L, לשתי החברות היה רווח זהה π'. נובע, $\pi_L^*>\pi'$. בפועל F בחרה שלא להעלות את המחיר כל כך הרבה. נובע מכך ש$\pi_F^*>\pi'$. ולכן קיבלנו את המסקנה הנ"ל.

דביר צנוע || http://dvirtzanua.wordpress.com || dvirsmail@gmail.com

כלכלת אינפורמציה

דיברנו על סיטואציות שונות עד כה, ובפרט, על סיטואציות בהן שררה אי ודאות – אך אי הודאות היתה תקפה באופן שווה לגבי כל השחקנים במשחק. כעת נדון במקרים בהם קיימת **אינפורמציה אסימטרית (פרטית)** – לאחד הצדדים בטרנזאקציה יש אינפורמציה שאין לצדדים האחרים, והיא חשובה לעסקה עצמה. לדוגמה:

- במכרז- לכל אחד יש אינפורמציה פרטית על השווי בזכיה במכרז מבחינתו.
- תמרוץ מנהלים – למנהל החברה יש מידע על החברה אשר לא קיים אצל בעלי המניות.

<u>מוכרים / קונים</u>

למוכר יש אינפורמציה פרטית על שווי מוצר / האיכות שלו (היסטוריה שלו, תדירות תקלות וכו').

- הדוגמה הקלאסית היא של מוכר מכונית משומשת.
- חברת סטארט-אפ המציעה את עצמה ל-IPO.
- מומחה – רופא או מוסכניק, שיש לו אינפורמציה פרטית לגבי סוג המוצר או הטיפול הדרוש לקונה (לעתים הקונה יהיה המומחה).
- הקונה יודע על הנכונות שלו עצמו לשלם (העדפותיו), נכונותו לחפש מוצרים חליפיים וכו'.
- בביטוח: הקונה יודע כמה יעלה למוכר לספק לו את השירות.

<u>Insiders \ Outsiders בחברות</u>

- מנכ"ל מול דירקטוריון / עובדים.
- חברה מול בעלי מניות.

<u>רגולציה</u>

- חברה מפוקחת – נתוני העלויות הם משהו שהחברה יודעת והרגולטור אינו יודע.

<u>מימון מוצרים ציבוריים</u>

- לכל אחד יש שווי עצמי לגבי המוצר הציבורי, אך לכל פרט יש אינטרס להמעיט בשווי המוצר לגבי עצמו, כדי שהאחרים ישלמו יותר.

בסיכומו של דבר, בכל אחת מהדוגמאות, קיימת סיטואציה אסטרטגית, בה לאחד הצדדים יש יתרון על פני הצד השני.

Adverse Selection (סלקציה מוטה שלילית)

כאשר מוכר מסוים מציע מוצר המיועד לממוצע האוכלוסיה, האוכלוסיה שתרצה לרכוש את המוצר, לא תייצג את כלל האוכלוסיה. נניח שחברת ביטוח מציעה פרמיה המציעה כיסוי של סיכון מסוים, המחושב לפי הסיכון הממוצע באוכלוסיה, ומבחינה הסתברותית החברות נמצאות ב-break even (ביטוח הוגן). בפועל – צרכנים בעלי רמת סיכון נמוכה לא ירצו לרכוש את הביטוח, וחברת הביטוח תישאר רק עם הצרכנים ה"רעים".

שוק המכוניות המשומשות (Market for Lemons)

ההנחות:

- יש בשוק הרבה מכוניות משומשות ברמות איכות שונות.

- איכות המכונית ידועה רק לבעלים הנוכחי שלה.
- נניח כי מכונית בשווי q לבעלים הנוכחי (המוכר), שווה 1.5q לקונה.
- שווי המכוניות q נדגם מתוך התפלגות אחידה בין 1000 ל-11000. אם כך, השווי למוכר יהיה [1000,11000], והשווי לקונה [1500,16500]. אינפורמציה זו ידועה לכל.
- מוכר לא ימכור בפחות מ-q.
- על כל מכוניות המיועדת למכירה יש מספר קונים פוטנציאליים.

נחפש את שיווי המשקל התחרותי:

- נתחיל ראשית במקרה (היפותטי) בו הקונים יכולים לוודא את איכות כל מכונית q (אינפורמציה סימטרית).

  במקרה זה בשו"מ תחרותי המחיר הוא בין q ל-1.5q. כל המכוניות המשומשות מועמדות למכירה ונדרשות ע"י בעלים חדשים. מצב זה הוא פארטו יעיל.
- האם יתכן כי במצב של אינפורמציה א-סימטרית כל המכוניות המשומשות נמכרות?
- שו"מ בתחרותי בציפיות רציונאליות כולל:
  - P – מחיר (נלקח כנתון ע"י קונים ומוכרים כאחד)
  - כמות המכוניות שימכרו.
  - המוכרים והקונים מתנהגים בצורה אופטימלית: מוכר יעמיד את רכבו למכירה רק אם P≥q.

    הקונה רואה את המחיר, את התנהגות המוכרים, ומבין את הרציונליות של השוק: הקונה יקנה רק אם תוחלת ערך הרכב בהינתן קבוצת המוכרים שהוא מצפה שיעמידו את רכבם למכירה, גדולה מהמחיר.
  - בשו"מ משקל הציפיות הרציונליות הן נכונות.
- נניח כי בשו"מ כל המכוניות נמכרות. במקרה כזה, תוחלת ערך הרכב עבור קונה היא:
  - כל המכוניות נמכרות ולכן שווי מכונית ממוצעת $9000 = \frac{1000+11000}{2} \cdot 1.5$.
  - לכן מחיר שו"מ צריך להיות 9000.
  - במקרה כזה, מכוניות בשווי למוכר של מעל 9000, לא יועמדו למכירה – סתירה להנחה הראשונית.

<u>מסקנה</u>: לא קיים שו"מ תחרותי בו כל המכוניות נמכרות.

נמשיך את הניתוח, ונניח כעת שרק המכוניות בשווי של עד 9000 נמכרות. אבל במצב כזה, המחיר שיקבע על ידי הקונים יהיה 7500. התהליך הזה ימשיך, והמחיר ילך וירד – ננסה למצוא בכל זאת שו"מ תחרותי בו נמכרות מכוניות.

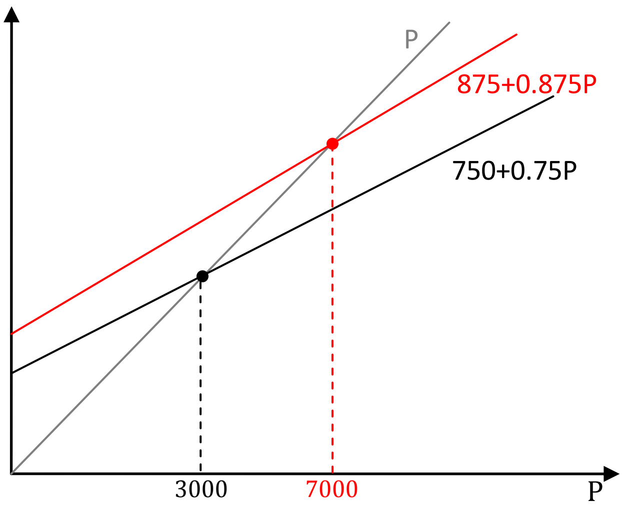
- נניח כי מחיר שו"מ תחרותי P^*.
- המכוניות שיועמדו למכירה הן באיכות $Q^*=[1000,P^*]$ (קבוצת המוכרים).
- המחיר P^*, מנקודת ראות הקונים, צריך לקיים:

$$P^* = E[1.5q \mid q \in [1000, P^*]]$$

$$P^* = 1.5 \cdot \overbrace{\frac{1000 + P^*}{2}}^{\text{שווי ממוצע למוכר}} = 750 + 0.75P^*$$

$$\boldsymbol{P^* = 3000}$$

המכוניות שנמכרות, לפיכך, הן באיכות שבין 1000-3000 למוכר. כלומר, רק 20% מהמכוניות נמכרות.



נבדוק מה היה קורה לו השווי של מכונית היה גבוה יותר למוכר, נניח 1.75q. אם נשרטט את המשוואה על מערכת צירים, נראה שככל שהשווי לקונה עולה, נקבל קו בעל שיפוע גבוה יותר, ועל כן, מחיר שו"מ גבוה יותר.

$$P^* = 1.75 \cdot \frac{1000 + P^*}{2}$$
$$= 875 + 0.875P^*$$
$$\Rightarrow P^* = 7000$$

במקרה כזה נמכרות 60% מהמכוניות, ובעיית ה-Adverse Selection מצטמטמת.

נניח עתה שהגדלנו את טווח השווי של המכוניות ל-[500,11500], כך שתוחלת מכונית ממוצעת לא תשתנה. משוואת המחיר שלנו היא עכשיו כזו:

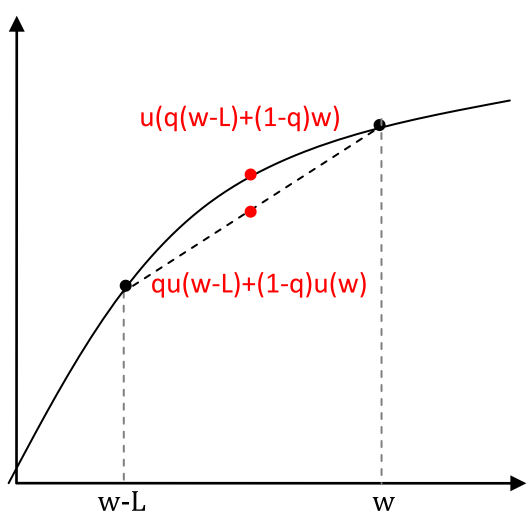
$$P^* = 1.5 \cdot \frac{500 + P^*}{2} = \frac{750}{2} + 0.75P \Rightarrow P^* = 1500$$

כלומר, הוספת מכוניות גרועות רק הלך והחמיר את כשל השוק שלנו. לו היינו מוסיפים מכוניות גרועות עד לשווי של 0, היינו מגיעים ל-P=0 – כשל שוק מלא.

השוק לביטוח

הפרטים בשוק הנם שונאי סיכון (פונקצית התועלת שלהם קמורה). u היא פונקצית התועלת, כאשר $u'>0$, $u''<0$, $u(0)=0$.

לפרטים יש הון ראשוני w, והם חשופים לסיכון מסוים. בהסתברות q הם יכולים לאבד L מסך ההון (עקב שריפה, תאונה וכד'). q הוא אינפורמציה פרטית של רוכש הביטוח.



תוחלת התועלת ללא ביטוח:

$$q \cdot u(w - L) + (1 - q) \cdot u(w)$$

אם q ניתן לצפיה ע"י חברות הביטוח, אזי תחרות תביא את מחיר הפוליסה ל-qL (המבטחים אדישים לסיכון). במחיר qL כל הפרטים מעוניינים לרכוש ביטוח מלא.

משנאת סיכון נובע כי:

$$u(w - qL) > q \cdot u(w - L) + (1 - q) \cdot u(w)$$

$$w - qL = q(w - L) + (1 - q) \cdot w$$

כעת נעבור למצב של אינפורמציה פרטית. נניח שהפרמיה על פוליסת ביטוח מלא היא P. פרט עם סיכוי לתאונה q, ירכוש פוליסת ביטוח אם:

$$u(q-P) \geq q \cdot u(w-L) + (1-q) \cdot u(w)$$

$$\Rightarrow q[u(w)-u(w-L)] \geq u(w)-u(w-P)$$

$$\Rightarrow q \geq \underbrace{\frac{u(w)-u(w-P)}{u(w)-u(w-L)}}_{h(P)}$$

כלומר, ברור שרק פרטים עם סיכון לתאונה $q \geq h(P)$, יקנו ביטוח במחיר P.

תוחלת התשלום של מבטח על כל פוליסה היא:

$$E[q \cdot L | q \geq h(P)]$$

$$= E[q | q \geq h(P)] \cdot L$$

מכאן נובע, שבשו"מ תחרותי מחיר הפוליסה יקיים:

$$P^* = E[q \cdot L | q \geq h(P^*)]$$

נניח כי התפלגות הסיכון q באוכלוסיה היא אחידה – $q \sim [0,1]$. התפלגות זו ידועה לחברות הביטוח.

$$E[q | q \geq h(P)] = \frac{h(P)+1}{2}$$

$$P^* = \frac{1+h(P^*)}{2} \cdot L$$

שימו לב כי:

$$h(L) = 1$$

$$\frac{1+h(L)}{2} \cdot L = \frac{1+1}{2} \cdot L = L$$

ולכן $P^*=L$ מקיים את תנאי שיווי המשקל. אבל זה לא באמת ביטוח – ביטוח כזה יקנה רק פרט שהסיכוי שלו לתאונה שווה 1.

נניח כעת את ההנחות המפשטות הבאות:

$$w = 1, \qquad L = 1, \qquad u(w) = \sqrt{w}$$

לכן,

$$h(P) = \frac{u(1)-u(1-P)}{u(1)-u(0)}$$

$$P^* = \left(1 + \frac{u(1) - u(1 - P^*)}{u(1)}\right) \cdot \frac{L}{2}$$

$$2P^* \cdot u(1) = 2u(1) - u(1 - P^*)$$

$$u(1 - P^*) = 2(1 - P^*)u(1)$$

$$\sqrt{1 - P^*} = 2(1 - P^*) \cdot 1$$

$$\frac{1}{2} = \sqrt{1 - P^*}$$

$$\frac{1}{4} = (1 - P^*)$$

$$\boldsymbol{P^* = \frac{3}{4}}$$

כדי לדעת כמה מהפרטים רוכשים את הביטוח, נחשב את $h(P^*)$:

$$h\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1 - u\left(\frac{1}{4}\right)}{1} = \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{4}}}{1} = \frac{1}{2}$$

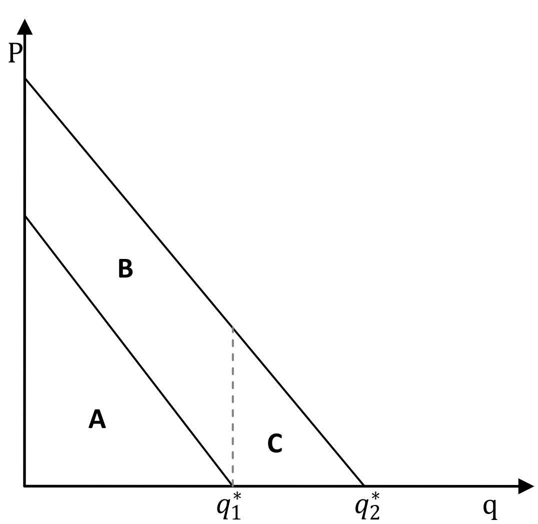
מסקנה: פרטים עם סיכון $q<0.5$ לא רוכשים ביטוח כלל.

סינון (Screening)

מתאר כיצד הצד חסר האינפורמציה יכול לפעול כדי לגרום לצד בעל האינפורמציה הפרטית "לחשוף" אותה.

דוגמאות:

- מבטח שניצב מול פרטים עם רמות סיכון שונות (פתרון: להציג סוגי ביטוח שונים, חלקי ומלא)
- מוכר שניצב מול צרכנים עם נכונות שונה לשלם (העדפות שונות על איכות) – אפליית מחירים מסדר II.
- רגולטור שניצב מול חברה שיש לה אינפורמציה פרטית על עלות ייצור (רשות החשמל מול חברת החשמל).



אפליית מחירים מסדר שני

מונופול עומד בפני שני טיפוסי צרכנים (ביקוש גבוה וביקוש נמוך).

טיפוס 1 – ביקוש נמוך.

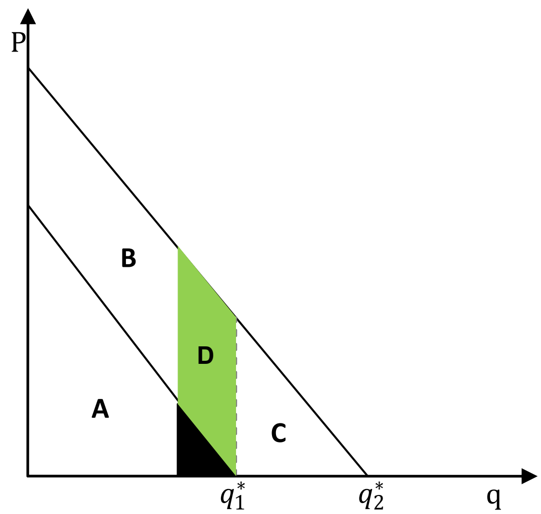
טיפוס 2 – ביקוש גבוה.

נניח שהמונופול היה יכול לצפות בטיפוסי צרכנים (אפלית מחירים מושלמת). בתנאים אלו המונופול היה מוכר:

- q_1^* לצרכן מטיפוס 1 – עודף צרכן ברוטו A.
- q_2^* לצרכן מטיפוס 2 – עודף צרכן ברוטו A+B+C.

מצרכן 1 הוא גובה תשלום A ומצרכן 2 תשלום של A+B+C – כך שנותר עודף צרכן נטו של 0 לשני הטיפוסים.

בתנאים של אינפורמציה פרטית, אם המונופול היה מציע את החבילות הללו, כל הצרכנים יבחרו לקנות q_1^* יחידות (במחיר A). צרכן מטיפוס 2 יקבל עודף צרכן נטו חיובי – B.



המונופול יכול להוריד את המחיר שהוא גובה מצרכן 2 ל-A+C, כך שהוא עדיין יקנה את הכמות המבוקשת המלאה, ויישאר עם עודף צרכן B.

האם המונופול יכול לשפר את מצבו?

המונופול יכול להקטין את הכמות q_1^* שהוא מוכר לטיפוס 1, ולכן להפוך את החבילה של טיפוס 1 לפחות אטרקטיבית לטיפוס 2. הוא יציע את החבילות הבאות:

- $q_1^{*'} (< q_1^*)$ במחיר A-Δ.
- q_2^* במחיר A+C+D.

אפלית מחירים אופטימלית מסדר שני

- מוכר מונופול עם עלות c ליחידה.
- צרכנים רבים. לצרכן הצורך q יחידות אותן הוא רוכש במחיר כולל t מהמוצר יש תועלת:

$$\theta \cdot u(q) - t$$

כאשר u היא פונקציה קמורה. θ גבוה משמעו נכונות גבוהה לשלם עבור המוצר, והוא אינפורמציה פרטית של הצרכנים. בפרט, נניח כי יש שני טיפוסי צרכנים:

$\bar{\theta}$ - צרכן עם ביקוש גבוה.

$\underline{\theta}$ - צרכן עם ביקוש נמוך.

הערה: למעבר מנתונים אלה לפונקצית ביקוש הופכית - נגזור את פונקציות הביקוש של הצרכנים.

$$\max \theta \cdot u(q) - p \cdot q$$

$$\frac{\partial}{\partial q} : \theta \cdot u'(q^*) - p = 0 \Rightarrow u'(q^*) = \frac{p}{\theta}$$

פונקצית התועלת הבאה תיתן ביקושים ליניאריים:

$$u(q) = \begin{cases} \frac{100 - (10 - q)^2}{2}, & q \leq 10 \\ 50, & q = 10 \end{cases}$$

$$u'(q) = 10 - q$$

נשתמש בה ונקבל:

$$10 - q^* = \frac{p}{\theta} \Rightarrow q^* = 10 - \frac{p}{\theta}$$

תחת אינפורמציה מלאה, המונופול ימכור לכל טיפוס צרכן את הכמות היעילה:

$$\bar{\theta}u'(\bar{q}^*) = c$$

$$\underline{\theta}u'\left(\underline{q}^*\right) = c$$

מכך נובע ש-$\bar{q}^* > \underline{q}^*$.

<u>באינפורמציה פרטית</u>, המונופול יציע שתי חבילות:

- $(\bar{q}, \bar{t})$ שתיועד לצרכן מהטיפוס הגבוה.
- $\left(\underline{q}, \underline{t}\right)$ שתיועד לצרכן מהטיפוס הנמוך.

נניח כי ידוע שהאוכלוסיה הכללית מחלוקת בפרופורציות של $v \in [0,1]$ מהטיפוס הגבוה, ו-$1-v$ מהטיפוס הנמוך.

$$\max_{\underline{q},\underline{t},\bar{q},\bar{t}} v \cdot [\bar{t} - c \cdot \bar{q}] + (1 - v) \cdot \left[\underline{t} - c \cdot \underline{q}\right]$$

$$s.t.$$

$$1)\ \bar{\theta} \cdot u(\bar{q}) - \bar{t} \geq 0$$
$$2)\ \underline{\theta} \cdot u\left(\underline{q}\right) - \underline{t} \geq 0$$
$$3)\ \bar{\theta} \cdot u(\bar{q}) - \bar{t} \geq \bar{\theta} \cdot u\left(\underline{q}\right) - \underline{t}$$
$$4)\ \underline{\theta} \cdot u\left(\underline{q}\right) - \underline{t} \geq \underline{\theta} \cdot u(\bar{q}) - \bar{t}$$

מגבלות 1,2 נקראת מגבלות השתתפות individual rationality – התועלת של הצרכנים חייבת להיות חיובית כדי שישתתפו במסחר. מגבלות 3,4 נקראות מגבלות תמריצים incentive compatibility – שמונעות מסוג אחד של צרכן "להתחזות" לצרכן השני.

אם נחבר את מגבלות התמריצים 3 ו-4, נקבל:

$$\bar{\theta} \cdot u(\bar{q}) + \underline{\theta} \cdot u\left(\underline{q}\right) - \bar{t} - \underline{t} \geq \bar{\theta} \cdot u\left(\underline{q}\right) + \underline{\theta} \cdot u(\bar{q}) - \bar{t} - \underline{t}$$

$$\left(\bar{\theta} - \underline{\theta}\right) \cdot u(\bar{q}) \geq \left(\bar{\theta} - \underline{\theta}\right) \cdot u\left(\underline{q}\right)$$

$$u(\bar{q}) \geq u\left(\underline{q}\right)$$

$$\bar{q} \geq \underline{q}$$

ולכן, הכמות שנמכרת לטיפוס הגבוה גדולה יותר.

<u>רווח אינפורמציה (information rent) -</u> ראינו כבר בניתוח הגרפי כי לצרכנים עם ביקוש גבוה תהיה רנטה חיובית (כל עוד הוא מוכר לשני טיפוסי הצרכנים).

עם זאת, ממשוואה 2 נובע כי לטיפוס הנמוך יש רנטה אי-שלילית. אם הרנטה של טיפוס 2 היא חיובית, נקבל:

$$\bar{\theta} \cdot u\left(\underline{q}\right) - \underline{t} > \underline{\theta} \cdot u\left(\underline{q}\right) - \underline{t} \geq 0$$

$$\bar{\theta} \cdot u(\bar{q}) - \bar{t} > \bar{\theta} \cdot u\left(\underline{q}\right) - \underline{t}$$

נובע לפיכך כי *לצרכן הגבוה יש רנטה חיובית ממש*.

ננסה לנסח את הבעיה בצורה מעט אחרת, על מנת שתהיה תלויה בתועלות:

$$\bar{u} = \bar{\theta}u(\bar{q}) - \bar{t} \Rightarrow \bar{t} = \bar{\theta}u(\bar{q}) - \bar{u}$$

$$\underline{u} = \underline{\theta}u\left(\underline{q}\right) - \underline{t} \Rightarrow \underline{t} = \underline{\theta}u\left(\underline{q}\right) - \underline{u}$$

נציב את זה חזרה בבעית המקסימיזציה:

$$\max_{\underline{q},\bar{q},\underline{u},\bar{u}} v(\bar{\theta}u(\bar{q}) - c\bar{q} - \bar{u}) + (1-v)\left(\underline{\theta}u\left(\underline{q}\right) - c\underline{q} - \underline{u}\right)$$

$$= \underbrace{v(\bar{\theta}u(\bar{q}) - c\bar{q})}_{\text{עודף מצרכן גבוה}} + (1-v)\left(\underline{\theta}u\left(\underline{q}\right) - c\underline{q}\right) - \underbrace{(v\bar{u} + (1-v)\underline{u})}_{\text{רווחי אינפורמציה}}$$

$$s.t.$$

$$1)\ \bar{u} \geq 0$$

$$2)\ \underline{u} \geq 0$$

$$3)\ \bar{u} \geq \underline{u} + (\bar{\theta} - \underline{\theta})u\left(\underline{q}\right)\ (*)$$

$$4)\ \underline{u} \geq \bar{u} - (\bar{\theta} - \underline{\theta})u(\bar{q})$$

$$(*)\ \bar{u} \geq \bar{\theta}u\left(\underline{q}\right) - \underline{t} = \underline{\theta}u\left(\underline{q}\right) - \underline{t} + \bar{\theta}u\left(\underline{q}\right) - \underline{\theta}u\left(\underline{q}\right) = \underline{u} + (\bar{\theta} - \underline{\theta})u(\underline{q})$$

ננתח את היחסים בין המגבלות. בפתרון האופטימלי, מתקיים:

1. אם $\underline{q} > 0$, אזי $\bar{u} > 0$, כי ממגבלה 3 נובע:

$$\bar{u} \geq \underline{u} + (\bar{\theta} - \underline{\theta})u\left(\underline{q}\right) > 0$$

2. מגבלה 3 מקיימת שוויון. מדוע? מניסוח בעית המקסימיזציה, ברור ש-ū *מוריד* מרווחי הפירמה. לכן המקסימיזציה של בעיה זו מחייבת ש-ū יירד ככל האפשר. מגבלה 1 רק מגבילה את ū להיות חיובי, ולכן המגבלה האפקטיבית היחידה שלנו תהיה מגבלה 3. כלומר, ū ילך וירד עד אשר מגבלה 3 תתקיים בשוויון.
3. $\underline{u} = 0$. מדוע? נניח בשלילה שלא, ו-$\underline{u} > 0$. אזי אפשר להוריד ε משתי התועלות מבלי לפגוע באף אחת מהמגבלות – סתירה.
4. נציב את המסקנות שלעיל לתוך מגבלה 4:

$$0 \geq (\bar{\theta} - \underline{\theta})u\left(\underline{q}\right) - (\bar{\theta} - \underline{\theta})u(\bar{q})$$

$$(\bar{\theta} - \underline{\theta})u(\bar{q}) \geq (\bar{\theta} - \underline{\theta})u\left(\underline{q}\right)$$

כלומר, תנאי זה יתקיים רק אם $\bar{q} \geq \underline{q}$.

נניח כי מגבלה 4 מתקיימת באי-שוויון חזק ונוודא זאת אחר כך. נציב כעת את המסקנות1-4 שלעיל בתוך בעית המקסימום. למעשה חיסלנו את שני ה-u וקיבלנו בעית מקסימום פשוטה הרבה יותר לפתרון.

$$\max_{\underline{q},\bar{q}} v(\bar{\theta}u(\bar{q}) - c\bar{q}) + (1-v)\left(\underline{\theta}u\left(\underline{q}\right) - c\underline{q}\right) - v(\bar{\theta} - \underline{\theta})u(\underline{q})$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{q}}: v(\bar{\theta}u'(\bar{q}) - c) = 0 \Rightarrow \ \bar{\theta}u'(\bar{q}) = c$$

<u>מסקנה:</u> הכמות הנמכרת לטיפוס הגבוה שווה לכמות היעילה (no distortion at the top).

$$\frac{\partial}{\partial \underline{q}}: (1-v)\left(\underline{\theta}u'\left(\underline{q}\right) - c\right) - v(\bar{\theta} - \underline{\theta})u'\left(\underline{q}\right) = 0$$

$$\underline{\theta}u'\left(\underline{q}\right) - \frac{v}{1-v}(\bar{\theta} - \underline{\theta})u'\left(\underline{q}\right) = c$$

$$\left(\underline{\theta} - \frac{v}{1-v}(\bar{\theta} - \underline{\theta})\right) \cdot u'\left(\underline{q}\right) = c$$

ננסה להשוות בין הכמות המתקבלת מפתרון משוואה זו, לכמות היעילה ($\underline{\theta}u'\left(\underline{q}^*\right) = c$). כיוון שברור שהביטוי המוכפל בפונקצית התועלת במשוואת הפתרון שלנו קטן מ-θ, ברור גם ש-q עבור הצרכן הנמוך המתקבל בפתרון זה נמוך יותר מהפתרון היעיל.

- הערה: יתכן שגם ב-$\underline{q} = 0$ צד שמאל של המשוואה יהיה קטן מ-c. במקרה זה, המונופול לא ימכור כלל לטיפוס הנמוך. במקרה זה, לטיפוס הגבוה לא יוותר רווח אינפורמציה ū=0.

מסקנות:

1. הכמות שנמכרת לטיפוס גבוה היא הכמות היעילה. טיפוס צרכן זה מקבלת תועלת חיובית ממש (המונופול לא לוקח את כל עודף הצרכן).
2. הכמות שנמכרת לטיפוס הנמוך קטנה מהכמות היעילה. לטיפוס זה תועלת צרכן אפס.

לפני שנסגור את הנושא, רק נותר להוכיח שמגבלה 4 אכן מקיימת אי שווין חזק:

$$\underline{q} < \underline{q}^* < \bar{q}^* = \bar{q} \Rightarrow \underline{q} < \bar{q}$$

דוגמה מספרית

$$u(q) = \frac{100 - (10 - q)^2}{2} \Rightarrow u^{'}(q) = 10 - q$$

$$c = 5, v = \frac{1}{4}, \bar{\theta} = 2, \underline{\theta} = 1$$

תחת אינפורמציה מלאה:

$$10 - \underline{q}^* = 5 \ \Rightarrow \boldsymbol{\underline{q}^*} = \mathbf{5}$$

$$2(10 - \bar{q}^*) = 5 \Rightarrow \boldsymbol{\bar{q}^*} = \mathbf{7.5}$$

תחת אינפורמציה פרטית:

$$\boldsymbol{\bar{q}} = \boldsymbol{\bar{q}^*} = \mathbf{7.5}$$

$$\left(1 - \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} \cdot (2 - 1)\right)\left(10 - \underline{q}\right) = 5 \Rightarrow \boldsymbol{\underline{q}} = \mathbf{2.5}$$

נחשב את הסכומים שגובה המונופול. הטיפוס הנמוך:

$$\overset{0}{\underline{u}} = \underline{\theta} u\left(\underline{q}\right) - \underline{t}$$

$$\underline{t} = \underline{\theta} u(\underline{q})$$

$$\underline{t} = 1 \cdot \frac{100 - (10 - 2.5)^2}{2} = 21.875$$

הטיפוס הגבוה:

$$\underset{(\bar{\theta} - \underline{\theta}) u\left(\underline{q}\right)}{\bar{u}} = \bar{\theta} u(\bar{q}) - \bar{t}$$

$$(2 - 1) \cdot 21.875 = 2 \cdot \frac{100 - (10 - 7.5)^2}{2} - \bar{t}$$

$$\bar{t} = 71.875$$

חברה מפוקחת עם פונקצית הוצאות: c(q)=θq+F. העלות הקבועה, F, ידועה. העלות השולית, θ, היא אינפורמציה פרטית של הפירמה. נניח כי θ יכול לקבל שני ערכים, עליון ותחתון, ו-v היא ההסתברות שנותן הרגולטור לערך הנמוך (ו-1-v ההסתברות המשלימה). חברה יעילה יכולה להתחזות ללא יעילה, וכך ליהנות מעודף גבוה יותר.

בשוק קיים רגולטור שתפקידו לשמור על האינטרסים של הצרכנים. לצרכנים פונקצית ביקוש אגרגטיבית הופכית P(q) למוצר שמייצרת החברה.

נגדיר S(q) כעודף צרכן ברוטו:

$$S(q) = \int_0^q P(s)\, ds$$

נניח שהחוזה הרגולטורי קובע כמות q שתיוצר ותשלום העברה t שישולם לחברה. תשלום זה יורכב ממחיר המוצר ומסובסידיה, שניהם נקבעים על ידי הרגולטור. לכן, רווח החברה הוא:

$$U = t - \theta q - F$$

הרגולטור מבקש למקסם את

$$S - t + \alpha U$$

כאשר 0<α<1. נוסיף לאגף שמאל U ונחסר מאגף ימין, ונקבל:

$$\underbrace{S(q) - \theta q - F}_{\text{רווחה חברתית}} - \underbrace{(1-\alpha)U}_{\text{הרווח שנותר לחברה המפוקחת כפול קבוע}}$$

תחת אינפורמציה מלאה הרגולטור יקבע q הממקסם את הרווחה החברתית, כך ש:

$$S'(q^*) = \theta$$

ולפירמה יישאר רווח אפס.

תחת אינפורמציה פרטית, הפתרון של אינפורמציה מלאה אינו אפשרית, והרגולטור יציע "תפריט" של חוזים רגולטוריים:

- $(\underline{q}, \underline{t})$ - "מיועד" לחברה יעילה.
- $(\bar{q}, \bar{t})$ - "מיועד" לחברה פחות יעילה.

$$\max_{\underline{q},\bar{q},\underline{U},\bar{U}} v\left[S\left(\underline{q}\right) - \underline{\theta}\underline{q} - F\right] + (1-v)[S(\bar{q}) - \bar{\theta}\bar{q} - F] - (1-\alpha)\left[v \cdot \underline{U} + (1-v) \cdot \bar{U}\right]$$

$$s.t.$$

$$1)\ \underline{U} \geq 0$$

$$2)\ \bar{U} \geq 0$$

$$3)\ \underline{U} \geq \bar{U} + (\bar{\theta} - \underline{\theta})\bar{q}$$

$$4)\ \bar{U} \geq \underline{U} - (\bar{\theta} - \underline{\theta})\underline{q}$$

מאותם שיקולים של הדוגמה הקודמת, ניתן להסיק את אותן מסקנות לגבי אי השוויונים:

$$1)\ \underline{U} > 0$$

$$2)\ \bar{U} = 0$$

$$3)\ \underline{U} = \bar{U} + (\bar{\theta} - \underline{\theta})\bar{q}$$

$$4)\ \bar{U} > \underline{U} - (\bar{\theta} - \underline{\theta})\underline{q}$$

ולהציב שוב חזרה בבעית המקסימום:

$$\max_{\underline{q},\bar{q}} v\left[S\left(\underline{q}\right) - \underline{\theta}\underline{q} - F\right] + (1-v)[S(\bar{q}) - \bar{\theta}\bar{q} - F] - (1-\alpha)v(\bar{\theta} - \underline{\theta})\bar{q}$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{q}} : S'\left(\underline{q}\right) = \underline{\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{q}} : (1-v)[S'(\bar{q}) - \bar{\theta}] - (1-\alpha)v(\bar{\theta} - \underline{\theta}) = 0$$

$$S'(\bar{q}) = (1-\alpha)\frac{v}{1-v}(\bar{\theta} - \underline{\theta}) + \bar{\theta}$$

נזכור ש-

$$S(q) = \int_0^q P(s)\, ds \Rightarrow S'(q) = P(q)$$

כך מקבלים שהמחיר לחברה היעילה נקבע להיות העלות השולית:

$$P\left(\underline{q}\right) = \underline{\theta}$$

ולחברה הלא יעילה, מעל העלות השולית:

$$P(\bar{q}) = \overbrace{(1-\alpha)\frac{v}{1-v}(\bar{\theta} - \underline{\theta})}^{+} + \bar{\theta} > \bar{\theta}$$

כעת נחזור לתיאור הבעיה המקורית ונפרק את t לשניים, מחיר וסובסידיה:

$$t = P \cdot Q(P) + w$$

עבור הפירמה היעילה:

$$\underline{P} = \underline{\theta}, \qquad \underline{U} > 0 \Rightarrow w > F$$

ועבור הפירמה הלא יעילה:

$$\bar{P} > \bar{\theta}, \qquad \bar{U} = 0 \Rightarrow w < F$$

ניתן לראות זאת גם כך:

$$\overbrace{(\bar{P} - \bar{\theta})\bar{q}}^{+} + \overbrace{w - F}^{-} = 0$$

בעיות מנהל-סוכן (principal-agent)

שם אחר לבעיות מסוג זה הוא סיכון מוסרי (moral hazard). פה מדובר על צד אחד שמבצע פעולה עבור צד שני, כאשר הצד עבורו מבצעים את הפעולה לא יכול לצפות בצד המבצע.

- צד מיודע – הסוכן
- צד לא מיודע – המנהל
- פעולה

הפעולה נבחרת על ידי הסוכן אך אינה נצפית על ידי המנהל.

צד מיודע – הסוכן	צד לא מיודע – המנהל	פעולה
עובד	מעביד	מאמץ
לווה	בנק (מלווה)	מאמץ
שוכר רכב	חברת ליסינג	שמירה על הרכב
מבוטח	מבטח	מניעת התאונה

אם מבחן התוצאה היה פשוט לביצוע, לא היתה בעיה – כלומר, אם עובד היה נמדד בהצלחה וכישלון, היה רק צורך לבדוק את תוצאות פעולותיו. אך בפועל, התוצאה מורכבת ממאמץ הסוכן ומאלמנטים רנדומליים. לכן לא תמיד ניתן להסיק מהתוצאה את מידת המאמץ.

קיים קונפליקט בין הסוכן לבין המנהל ביחס לפעולה הרצויה.

<u>דוגמה 1: עובד / מעביד</u>

- מעביד בוחר עובד לביצוע משימה מסוימת.
- התוצאה תלוי במאמץ שישקיע העובד.
- אם העובד יתאמץ (e=1): בהסתברות π_1 הרווח למעביד יהיה $\bar{s}$ ובהסתברות $1-\pi_1$ הרווח יהיה $\underline{s}$.

- אם לא יתאמץ ($e=0$): בהסתברות π_0 הרווח למעביד יהיה $\bar{s}$ ובהסתברות $1-\pi_0$ הרווח יהיה $\underline{s}$.
- $\pi_1>\pi_0$
- העובד שונא סיכון:
  - $U(t)$ פונקציה קעורה, $u'>0$, $u''<0$.
  - ψ – עלות המאמץ (ביח' תועלת).
  - אם העובד מתאמץ, תועלתו $u(t)-\psi$. אחרת, $u(t)$.
- המעביד אדיש לסיכון.
- המאמץ אינו ניתן לצפיה (לכן חוזה תלוי מאמץ אינו אפשרי), אך רמת הרווח למעביד s כן.
- ניתן לחתום על חוזה המותנה ברווח למעביד:
  - $\bar{t}$ אם הרווח $\bar{s}$.
  - $\underline{t}$ אם הרווח $\underline{s}$.

בעית המעביד:

1. האם לגרום לעובד להתאמץ או לא?
2. בהינתן שמעוניין שהעובד יתאמץ, לבחור t שימקסם את רווחיו באמצעות מיקסום:

$$\max_{\underline{t},\bar{t}} \pi_1(\bar{s}-\bar{t})+(1-\pi_1)\left(\underline{s}-\underline{t}\right)$$

$$s.t.$$

$$(IR)\ \pi_1\cdot u(t)+(1-\pi_1)u\left(\underline{t}\right)-\psi\geq 0$$

$$(IC)\ \pi_1\cdot u(\bar{t})+(1-\pi_1)u\left(\underline{t}\right)-\psi\geq \pi_0\cdot u(\bar{t})+(1-\pi_0)u\left(\underline{t}\right)$$

את תנאי IC אפשר לרשום גם כך:

$$(\pi_1-\pi_0)\left(u(\bar{t})-u\left(\underline{t}\right)\right)-\psi\geq 0$$

כדי שתנאי זה יתקיים, חייב בהכרח להתקיים ש-$\bar{t}>\underline{t}$, כלומר, המעביד חייב לשלם פרמיית מאמץ.

אחרי שפתרנו את בעית המקסימום, חוזרים לשאלה הראשונה ובודקים אם היא מתקיימת:

<u>אם המאמץ ניתן לצפיה ולאימות:</u>

במקרה זה יש לקיים רק את מגבלת ההשתתפות, IR, שכן החוזה ידרוש וישלם רק על מאמץ. לכן אין טעם לחשוף את העובד לסיכון – השכר קבוע ואינו תלוי תוצאה ($\underline{t}=\bar{t}$).

מ-IR נובע:

$$\pi_1 u(\bar{t}) + (1-\pi_1)u(\underline{t}) = \psi$$

$$\underline{t} = \bar{t} \Rightarrow u(\bar{t}) = u(\underline{t}) = \psi \Rightarrow \bar{t} = u^{-1}(\psi)$$

במקרה זה, כדאי לגרום לעובד להתאמץ אם:

$$(\pi_1 - \pi_0)(\bar{s} - \underline{s}) \geq u^{-1}(\psi)$$

<u>מאמץ לא ניתן לצפיה, והפרט אדיש לסיכון (u(t)=t):</u>

$$\max_{\underline{t},\bar{t}} \pi_1(\bar{s} - \bar{t}) + (1-\pi_1)(\underline{s} - \underline{t})$$

$$s.t.$$

$$(IR)\ \pi_1 \cdot \bar{t} + (1-\pi_1) \cdot \underline{t} \geq 0$$

$$(IC)\ (\pi_1 - \pi_0)(\bar{t} - \underline{t}) - \psi \geq 0$$

את שני ה-t ניתן להוריד בהדרגה עד אשר IR מקיימת שוויון.

פתרון אחד אפשרי לבעיה זו הוא:

$$\underline{t} = \underline{s} - T^*, \qquad \bar{t} = \bar{s} - T^*$$

פרשנות: T* משולם ע"י העובד למעביד בכל מקרה (מראש – כמו זיכיון). העובד מקבל את כל ההכנסות של העסק.
כדי למצוא את T*:

$$\pi_1(\bar{s} - T^*) + (1-\pi_1)(\underline{s} - T^*) = \psi$$

$$T^* = \pi_1 \bar{s} + (1-\pi_1)\underline{s} - \psi$$

(תנאי IC מתקיים בכל מקרה אם מניחים שהמאמץ שווה מלכתחילה).

<u>u''<0</u>

$$\max_{\underline{t},\bar{t}} \pi_1(\bar{s} - \bar{t}) + (1-\pi_1)(\underline{s} - \underline{t})$$

$$s.t.$$

$$(IR)\ \pi_1 \cdot u(t) + (1-\pi_1)u(\underline{t}) - \psi \geq 0$$

$$(IC)\ (\pi_1 - \pi_0)\left(u(\bar{t}) - u(\underline{t})\right) - \psi \geq 0\ (\Rightarrow \bar{t} \geq \underline{t})$$

בפתרון אופטימלי:

1. IR מתקיימת בשוויון. נוכיח בשלילה – נניח כי ניתן לבחור Δt<0 עבור שני ה-t כך ש:

$$u'(\bar{t})\Delta\bar{t} - u'(\underline{t})\Delta\underline{t} = 0$$

כלומר, כך שאין שינוי ב-IC, ובכך להעלות את רווח המעביד – סתירה.

2. IC מתקיימת בשוויון. זאת כדי להביא למינימום את הסיכון, וכך את הפרמיה שהמעביד צריך לשלם על הסיכון. נוכיח את שוויון IC באמצעות שלילה- נניח בשלילה שבמצב אופטימלי מתקיים $\bar{t}>\underline{t}$. אזי ניתן להקטין במעט את $\bar{t}$, ולהגדיל במעט את $\underline{t}$, כך ש:
   א. IR תישאר בשוויון
   ב. רווחי המעביד יעלו
   ג. אם השינוי קטן מספיק, IC לא תופר.

נוכיח את ב': בהינתן $\Delta\bar{t}<0$, $\Delta\underline{t}>0$, השינוי בתועלת של העובד (יש לזכור שאנחנו נעים לאורך עקומת האדישות של העובד):

$$\pi_1 \cdot u'(\bar{t}) \cdot \Delta\bar{t} + (1-\pi_1)u'(\underline{t}) \cdot \Delta\underline{t} = 0$$

$$\Delta\bar{t} = -\frac{1-\pi_1}{\pi_1} \cdot \frac{u'(\underline{t})}{u'(\bar{t})} \cdot \Delta\underline{t}$$

השינוי ברווחי המעביד:

$$-\pi_1 \cdot \Delta\bar{t} - (1-\pi_1)\Delta\underline{t} = \left(\pi_1 \cdot \frac{1-\pi_1}{\pi_1} \cdot \frac{u'(\underline{t})}{u'(\bar{t})} + 1 - \pi_1\right) \cdot \Delta\underline{t}$$

$$\text{שנוי ברווח} = (1-\pi_1)\left(\frac{u'(\underline{t})}{u'(\bar{t})} - 1\right) \cdot \Delta\underline{t} > 0$$

מכיוון ש-$\underline{t}<\bar{t}$ ומכיוון ש-u קעורה, נובע ש-$u'(\underline{t})>u'(\bar{t})$, ולכן הביטוי חיובי – כלומר, הצלחנו להעלות את הרווח, סתירה להנחת השלילה לפיה מצב המוצא היה אופטימלי.

נרשום מחדש את הבעיה לאור המסקנות הנ"ל:

$$\max_{\underline{t},\bar{t}} \pi_1(\bar{s} - \bar{t}) + (1-\pi_1)(\underline{s} - \underline{t})$$

$$s.t.$$

$$(IR)\ \pi_1 \cdot u(\bar{t}) + (1-\pi_1)u(\underline{t}) - \psi = 0$$

$$(IC)\ (\pi_1 - \pi_0)\left(u(\bar{t}) - u(\underline{t})\right) - \psi = 0$$

נגדיר $\bar{u}=u(\bar{t})$ ובהתאם $\underline{u}=u(\underline{t})$. נפתור את המשוואות IR, IC עבור $\underline{u}$, $\bar{u}$.

$$\begin{cases} \pi_1 \cdot \bar{u} + (1-\pi_1) \cdot \underline{u} = \psi \\ (\pi_1 - \pi_0)(\bar{u} - \underline{u}) = \psi \end{cases}$$

מתקבל:

$$\underline{u} = -\frac{\pi_0}{\pi_1 - \pi_0}\psi$$

$$\bar{u} = \frac{1-\pi_0}{\pi_1 - \pi_0}\psi$$

כלומר, פרמיה במקרה של הצלחה וקנס במקרה של כישלון. זו בהשוואה למצב שבו המאמץ נצפה, שבו מתקיים $\bar{u}=\underline{u}=\psi$.

מ-IR:

$$\psi = \pi_1 u(\bar{t}) + (1-\pi_1) u(\underline{t})$$

$$< u\left(\pi_1 \bar{t} + (1-\pi_1)\underline{t}\right)$$

אנו יודעים משנאת סיכון שהפרט יעדיף לקבל ψ מאשר את התוחלת של ψ. כאשר המאמץ לא נצפה, תוחלת השכר שמשלם המעביד גדולה מעלות המאמץ.

מכך נובע, יחסית למקרה שבו המאמץ נצפה, המעביד ירצה לגרום לעובד להתאמץ בפחות מקרים.

מאמץ כדאי אם ורק אם:

$$(\pi_1 - \pi_0)(\bar{s} - \underline{s}) > \pi_1 \bar{t} + (1-\pi_1)\underline{t} > u^{-1}(\psi)$$

אם ההבדל בין שני סוגי הרווח או בין שתי ההסתברויות קטן מאוד, אין טעם במאמץ.

אם ההבדל בין סוגי הרווח או בין ההסתברויות גדול, יש טעם לגרום לעובד להתאמץ.

במקרים שבין לבין, רק כאשר המאמץ נצפה (אבל לא כאשר אפשר לשלם רק על תוצאות).

<u>דוגמה 2: ביטוח</u>

- מבטח (מנהל)
- מבוטח (סוכן) שצריך להתאמץ כדי שלא תקרה תאונה.
  $u(w)$, $u''(w)<0$, $u'(w)>0$, w-הון
  יש סיכוי לתאונה שתגרום להפסד של L.
- אם מבוטח מתאמץ, הסיכוי לתאונה הוא $(1-\pi_1)$. אם מבוטח לא מתאמץ, הסיכוי לתאונה הוא $(1-\pi_0)$.

- חוזה הביטוח: (B,p) כאשר p הוא הפרמיה, ו-B הוא הפיצוי במקרה של תאונה.
  - B=L ביטוח מלא
  - B<L ביטוח חלקי (השתתפות עצמית L-B)

בהינתן שהחברה רוצה שהמבוטח יתאמץ, היא פותרת

$$\max \pi_1 \cdot p + (1-\pi_1)(p-B)$$

$$s.t.$$

$$(IC)\ \pi_1 \cdot u(w-p) + (1-\pi_1) \cdot u(w-L+B-p) - \psi \geq \pi_0 \cdot u(w-p) + (1-\pi_0) \cdot u(w-L+B-p)$$

$$(IR)\ \pi_1 \cdot u(w-p) + (1-\pi_1) \cdot u(w-L+B-p) - \psi \geq U_0 = \pi_1 \cdot u(w) + (1-\pi_1) \cdot u(w-L) - \psi$$

בדומה לבעיה הקודמת, גם IC ו-IR הנ"ל מקיימות שוויון.